

Examen partiel

– durée : une heure sept minutes et trente secondes –

1 Dilog [4 points]

On note Log la détermination principale du logarithme. Pour tous $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et $w \in \mathbb{C}$, on note

$$z^w = \exp(w \text{Log } z).$$

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres $a = \text{Log} \left(\frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right)$ et $b = \text{Log} \left[\left(\frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right)^i \right]$.

[On pourra utiliser le fait que $\ln 2 \approx 0,69$.]

2 (In)constance ? [5 points]

On note $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C}, z^5 = 2i\}$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. On suppose que $f(z) = \frac{1}{z^5 - 2i}$, pour tout z sur le cercle unité.

2.1) Dessiner $\mathcal{E}$.

2.2) Est-il vrai que, nécessairement, $f(z) = \frac{1}{z^5 - 2i}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$?

3 Une inégalité de Carathéodory [11 points]

Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, que l'on note D . Pour tout $z \in D$, on note $P(z)$ la partie réelle de $f(z)$ et $Q(z)$ sa partie imaginaire. On note enfin

$$\sum_n a_n z^n$$

le développement en série entière de f à l'origine.

3.1) Montrer que, pour tout $r \in]0, 1[$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 2\pi a_n r^n \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0.$$

3.2) En déduire que, pour tout $r \in]0, 1[$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

3.3) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) d\theta = \Re(a_0)$ dès que $0 < r < 1$.

3.4) Montrer que si $f(0) = \frac{1}{2}$ et si la partie réelle de f est une fonction positive, alors

$$\forall n \geq 1, |a_n| \leq 1.$$

Examen partiel : un corrigé succinct

1 Dulong

On calcule : $\frac{1+i}{32\sqrt{2}} = \frac{1}{32}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $\frac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$, si bien que $a = \text{Log } \frac{1+i}{32\sqrt{2}} = -5 \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

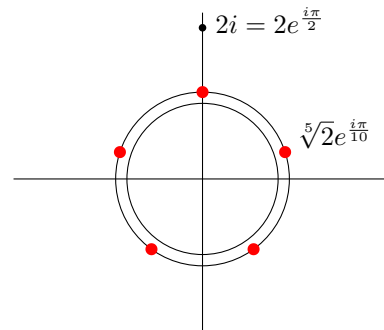
Ensuite, $\left(\frac{1+i}{32\sqrt{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{-5i \ln 2}$. Or, $-5 \ln 2 \approx -5 \times 0,69 = -3,45 \in]-3\pi, -\pi]$ ce qui montre que l'argument principal de $\left(\frac{1+i}{32\sqrt{2}}\right)^i$ est $-5 \ln 2 + 2\pi$. Il en résulte que

$$b = \text{Log} \left[\left(\frac{1+i}{32\sqrt{2}} \right)^i \right] = -\frac{\pi}{4} + i(-5 \ln 2 + 2\pi).$$

2 (In)constance ?

2.1) On dessine en rouge les points de $\mathcal{E}$. Les légendes du dessin suffisent à en expliquer la construction.

2.2) La fonction $f(z) - \frac{1}{z^5 - 2i}$ est (évidemment) holomorphe sur le connexe $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$ et s'annule sur le cercle unité qui est une partie non discrète de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. Le principe du prolongement analytique assure alors que $f(z) - \frac{1}{z^5 - 2i}$ est nulle sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. La réponse est *oui*.



3 Une inégalité de Carathéodory

3.1) Soient $n \geq 1$ et $r \in]0, 1[$. La formule de Cauchy en intégrant sur le lacet $C(0, r) : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto re^{i\theta}$ donne

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

qui fournit la première égalité. Par ailleurs, comme la fonction $z \mapsto z^{n-1}f(z)$ est holomorphe dans le disque unité, son intégrale sur le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct est nulle. Cela s'écrit

$$0 = ir^n \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

ce qui donne la seconde inégalité.

3.2) Soient $n \geq 1$ et $r \in]0, 1[$. On écrit les deux égalités précédentes en fonction des applications continues P et Q :

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta + i \int_0^{2\pi} Q(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (1)$$

et

$$0 = \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta + i \int_0^{2\pi} Q(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta.$$

On conjugue cette seconde inégalité, ce qui fournit

$$0 = \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta - i \int_0^{2\pi} Q(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (2)$$

On fait la somme des égalités (1) et (2), ce qui mène à l'égalité demandée.

3.3) Soit $r \in]0, 1[$. La formule de Cauchy montre que

$$\Re(a_0) = \Re\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz\right) = \Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) d\theta.$$

3.4) Soient $r \in]0, 1[$ et $n \geq 1$. Alors,

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta}) e^{-in\theta}| d\theta = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})| d\theta.$$

Puisque P est une fonction positive, on peut enlever les modules, ce qui donne, grâce à la question précédente et puisque $P(0) = \frac{1}{2}$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{r^n}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $r \in]0, 1[$, on en déduit que

$$|a_n| \leq \inf_{r \in]0, 1[} \frac{1}{r^n} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Contrôle continu : épreuve de remplacement

– durée : une heure et demie –

— Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve —

1 Un résidu [6 points]

Soit a un nombre réel strictement positif.

1.1) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1.2) Montrer que, pour tout $R > a$,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi e^{-a^2}}{a} - \oint_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + a^2} dz$$

où C_R est le chemin défini sur $[0, \pi]$ par la formule $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$.

1.3) En utilisant la majoration standard, montrer soigneusement que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\oint_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + a^2} dz \right) = 0.$$

1.4) Calculer le nombre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2} dt$.

2 De la restriction [5 points]

Soient D le disque unité ouvert du plan complexe, et U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant D . On note Φ l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(D) \\ f & \longmapsto & f|_D \end{array}$$

où $f|_D$ désigne la restriction de la fonction f à D .

2.1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective.

2.2) Montrer que Φ est surjective si, et seulement si la composante connexe de U contenant D est égale à D .

3 A la Jensen [9 points]

On note D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et $\overline{D}$ son adhérence. On note aussi $\mathcal{A}(\overline{D})$ l'ensemble des fonctions $\overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont à la fois continues sur $\overline{D}$ et holomorphes sur D . Lorsque $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$, on note enfin $\|f\|_\infty$ le maximum de $|f|$ sur $\overline{D}$.

3.1) Soient a et z deux nombres complexes. On suppose que $|z| = 1$ et $|a| \neq 1$. Montrer que

$$\left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| = 1.$$

3.2) Soit $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle et que f s'annule en un point $a \in D$. Soit m l'ordre (d'annulation) de f en a .

(i) Montrer que la fonction $g : z \mapsto f(z) \times \left(\frac{1 - \bar{a}z}{a - z} \right)^m$ est dans $\mathcal{A}(\overline{D})$.

(ii) Comparer les maximums de $|f|$ et de $|g|$ sur le cercle unité.

(iii) En déduire que $|f(0)| \leq |a|^m \|f\|_\infty$.

3.3) Soit $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$. On suppose que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et que

$$\forall z \in \overline{D}, |z| = 1 \implies |f(z)| \leq 1.$$

Montrer que $|f(0)| \leq \frac{1}{2}$.

3.4) Soit $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$. On suppose que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{i}{2}\right) = 0$ et que f envoie le cercle unité dans $\overline{D}$. Cela entraîne-t-il nécessairement que $|f(0)| \leq \frac{1}{4}$? [On pourra s'inspirer des méthodes utilisées plus haut.]

Epreuve de remplacement : un corrigé succinct

1 Un résidu

1.1) Pour tout $t \geq 0$,

$$\left| \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2} \right| \leq \frac{1}{t^2 + a^2}$$

qui est (évidemment) intégrable sur $[0, +\infty[$, puisque $a \neq 0$.

1.2) La formule des résidus sur le lacet formé de l'intervalle $[-R, R]$ concaténé avec le chemin C_R montre que

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{t^2 + a^2} dt + \oint_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + a^2} dz = 2i\pi \frac{e^{-a^2}}{2ia} = \frac{\pi e^{-a^2}}{a},$$

puisque l'unique pôle — simple — de la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{e^{iaz}}{z^2 + a^2}$ dans le demi-plan supérieur est ia .

1.3) Si $\theta \in [0, \pi]$ et si $R > a$, alors

$$\left| \frac{e^{ia \times Re^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} \right| = \frac{e^{-aR \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + a^2|} \leq \frac{1}{R^2 - a^2},$$

la dernière inégalité venant de la seconde inégalité triangulaire et du fait que $\sin \theta \geq 0$. Alors, la majoration standard entraîne que

$$\left| \oint_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

1.4) Puisque l'intégrale converge et puisque $\frac{\cos(at)}{t^2 + a^2}$ définit une fonction paire de t ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^2 + a^2} dt \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{t^2 + a^2} dt \right) \right).$$

Alors, les deux questions précédentes assurent que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\pi e^{-a^2}}{a} \right) = \frac{\pi e^{-a^2}}{2a}.$$

2 De la restriction

2.1) D'abord, Φ est linéaire ; elle est donc injective si, et seulement si non noyau est trivial.

Si U n'est pas connexe, soient C_D sa composante connexe qui contient D . Alors, la fonction valant 0 sur C_D et 1 sur l'ouvert non vide $U \setminus C_D$ est non nulle et appartient au noyau de Φ , qui n'est donc pas injective. Inversement, si U est connexe, puisque D est une partie non discrète du connexe U , le principe du prolongement analytique assure que toute fonction holomorphe sur U et nulle sur D l'est aussi sur U , ce qui prouve que Φ est injective.

Conclusion : Φ est injective si, et seulement si U est connexe.

2.2) On note encore C_D la composante connexe de U contenant D . Soit $f \in \mathcal{O}(D)$. Trouver un antécédent à f par Φ revient à prolonger f à U en une fonction holomorphe sur U . Puisqu'on peut toujours prolonger f par 0 sur les composantes connexes différentes de C_D , trouver un antécédent de f par Φ revient à prolonger f à C_D . Autrement dit, on peut supposer que U est connexe : on suppose que $U = C_D$. Si $U = D$, alors Φ est surjective : $f = \Phi(f)$,

pour tout $f \in \mathcal{O}(D)$. Il reste à montrer que si $U \neq D$, alors Φ n'est pas surjective, c'est-à-dire qu'alors, il existe une fonction holomorphe sur D qui ne se prolonge pas à U tout entier. Soit $u \in U \setminus D$. Alors, la fonction $z \mapsto \frac{1}{u-z}$, holomorphe sur D , ne se prolonge pas à une fonction holomorphe sur U car une telle fonction, par prolongement analytique, vaudrait aussi $\frac{1}{u-z}$ sur U , mais cette dernière ne se prolonge pas par continuité en u . Cela montre que si $C_D \neq D$, alors Φ n'est pas surjective.

3 A la Jensen

3.1) Puisque $|z| = 1$, on a $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{1}{z} \times \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \right| = 1 \times 1 = 1$.

3.2) (i) Soit $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit $F \in \mathcal{A}(\overline{D})$, non nulle en a , telle que $f(z) = (a-z)^m F(z)$ — l'existence de F au voisinage de a est due à la définition de l'ordre d'annulation ; que F se prolonge en un fonction de $\mathcal{A}(\overline{D})$ est immédiat. Alors, $g(z) = (1-\bar{a}z)^m F(z)$, pour tout $z \in \overline{D}$. Cette formule montre que $g \in \mathcal{A}(\overline{D})$.

(ii) La question 1) garantit que si $|z| = 1$, alors $|f(z)| = |g(z)|$.

(iii) Si $a = 0$, c'est évident puisque $f(0) = 0$. On suppose que $a \neq 0$. Le principe du module maximum montre, au vu de la question précédente, que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. Alors, $|g(0)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\frac{|f(0)|}{|a|^m} \leq \|f\|_\infty$. C'est cela qu'il fallait démontrer.

3.3) Si f est la fonction nulle, c'est évident. Sinon, on applique la question précédente pour $a = \frac{1}{2}$: si $m \geq 1$ est l'ordre d'annulation de f en $\frac{1}{2}$, alors $|f(0)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \|f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$.

3.4) Là encore, c'est évident si f est la fonction nulle. On suppose que f n'est pas nulle sur D . Par prolongement analytique, elle n'est donc nulle sur aucun voisinage de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{i}{2}$. On note respectivement m et n les ordres d'annulation de f en $\frac{1}{2}$ et en $\frac{i}{2}$. En reprenant les arguments de la question 2), la fonction

$$z \mapsto f(z) \times \left(\frac{1-\frac{z}{2}}{\frac{1}{2}-z} \right)^m \times \left(\frac{1+\frac{iz}{2}}{\frac{i}{2}-z} \right)^n$$

est encore dans $\mathcal{A}(\overline{D})$ et ne modifie pas le module de f sur le cercle. En écrivant que la valeur en 0 de cette fonction n'excède pas son maximum sur le cercle, on en déduit que

$$|f(0)| \leq \left| \frac{1}{2} \right|^m \left| \frac{i}{2} \right|^n \|f\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{m+n} \leq \frac{1}{4}.$$

La réponse est *oui*.

Examen

– durée : deux heures –

Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve

1 Une intégrale [10 points]

Il s'agit, dans cette partie, de calculer $I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(1+t^2)^2} dt$ où $p \in \mathbb{R}$, lorsque ce nombre existe.

Soit

$$U = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \notin [0, +\infty[\}.$$

Pour tout $z \in U$, on note $\log z$ le logarithme de z dont la partie imaginaire est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
 En outre, pour tout $(z, w) \in U \times \mathbb{C}$, on note $z^w = e^{w \log z}$.

1.1) Dessiner U .

1.2) Montrer que $(re^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta}$, pour tous $p \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

1.3) En déduire que $(-t)^p = t^p e^{i\pi p}$, pour tout $t > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{R}$.

1.4) Soient $a \in \mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de a . Montrer que le résidu en a de la fonction $z \mapsto \frac{g(z)}{(z-a)^2}$ est $g'(a)$.

1.5) En déduire que le résidu en i de la fonction $z \mapsto \frac{z^p}{(1+z^2)^2}$ est $\frac{p-1}{4}i^{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{R}$.

1.6) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $R > \varepsilon$, on note $\gamma(\varepsilon, R)$ “le” lacet de $\mathbb{C}$, concaténation dans cet ordre :

(i) “du” segment $[\varepsilon, R]$,

(ii) “du” demi-cercle C_R de centre 0 et de rayon R du demi-plan des parties imaginaires positives ou nulles, parcouru une fois dans le sens direct,

(iii) “du” segment $[-R, -\varepsilon]$

(iv) et “du” demi-cercle c_ε de centre 0 et de rayon ε du demi-plan des parties imaginaires positives ou nulles, parcouru une fois dans le sens indirect.

Dessiner le support de $\gamma(\frac{1}{2}, 2)$.

1.7) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $R > \varepsilon$,

$$\oint_{[-R, -\varepsilon]} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = e^{i\pi p} \int_\varepsilon^R \frac{t^p}{(1+t^2)^2} dt.$$

1.8) Montrer, à partir d'une inégalité obtenue par majoration standard, que si $p > -1$, alors

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \oint_{c_\varepsilon} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = 0.$$

1.9) Montrer que si $p < 3$, alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{C_R} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = 0.$$

1.10) En s'appuyant sur la formule des résidus, en déduire que, pour tout $p \in]-1, 3[$,

$$(1 + e^{i\pi p}) I(p) = \frac{1-p}{2} \pi i^p.$$

1.11) Montrer que, pour tout $p \in]-1, 3[\setminus \{1\}$,

$$I(p) = \frac{\pi(1-p)}{4 \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Que se passe-t-il si $p = 1$, $p \leq -1$ ou $p \geq 3$?

2 Fonction de Scorer[♠] [10 points]

L'objet de cette partie consiste à montrer que la fonction

$$\text{Hi}(z) = \int_0^{+\infty} e^{tz - \frac{t^3}{3}} dt \quad (1)$$

est bien définie, entière, et solution de l'équation différentielle $y'' - zy = 1$.

La fonction Gamma (Γ) d'Euler, on le redit ici, est définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0 \implies \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2.1) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leq e^{|z|}$.

2.2) Montrer soigneusement que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{rt - t^3/3}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2.3) Montrer que la fonction Hi, définie par la formule (1), est une fonction entière.

2.4) Montrer que la fonction Hi est solution du problème de Cauchy (de la variable complexe)

$$\begin{cases} \text{Hi}''(z) - z \text{Hi}(z) = 1 \\ \text{Hi}(0) = 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\ \text{Hi}'(0) = 3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right). \end{cases} \quad (2)$$

2.5) Montrer que le développement en série entière à l'origine de Hi est $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où

$$\forall n \geq 0, a_n = \frac{3^{\frac{n-2}{3}}}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right).$$

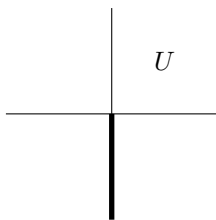
Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

[♠]La fonction usuelle de Scorer est à vrai dire $\frac{\text{Hi}}{\pi}$.

Examen : un corrigé succinct

1 Une intégrale

1.1) Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z \notin U$ si, et seulement s'il existe $t \geq 0$ tel que $z = -it$. D'où le dessin.



1.2) Avec les notations de l'énoncé, $re^{i\theta} \in U$ et $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, puisque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Ainsi, $(re^{i\theta})^p = e^{p \log(re^{i\theta})} = e^{p \ln r + ip\theta} = r^p e^{ip\theta}$.

1.3) Avec les notations de l'énoncé, $(-t)^p = (te^{i\pi})^p = t^p e^{ip\pi}$, la dernière égalité venant de la question précédente puisque $t > 0$ et $\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

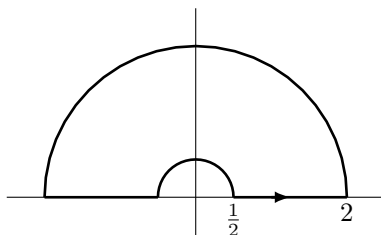
1.4) Soit D un disque ouvert centré en a sur lequel g est holomorphe. Soit alors h , fonction holomorphe sur D telle que $g(z) = g(a) + (z-a)g'(a) + (z-a)^2 h(z)$, pour tout $z \in D$. Alors, pour tout $z \in D$,

$$\frac{g(z)}{(z-a)^2} = \frac{g(a)}{(z-a)^2} + \frac{g'(a)}{z-a} + h(z),$$

ce qui prouve que le résidu de $\frac{g(z)}{(z-a)^2}$ en a est $g'(a)$.

1.5) On note $f(z) = \frac{z^p}{(1+z^2)^2} = \frac{g(z)}{(z-i)^2}$ où $g(z) = z^p(z+i)^{-2}$. On applique le résultat de la question précédente pour $a = i$. Comme $g'(i) = pi^{p-1}(2i)^{-2} - 2i^p(2i)^{-3} = \frac{1}{4}i^{p+1}(p-1)$, on obtient le résidu annoncé par l'énoncé.

1.6)



1.7) On paramètre le segment $[-R, -\varepsilon]$ par $[-R, -\varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$. Il vient alors

$$\oint_{[-R, -\varepsilon]} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{t^p}{(1+t^2)^2} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{(-t)^p}{(1+t^2)^2} dt$$

la seconde égalité étant obtenue après le changement de variable sous l'intégrale $t \rightsquigarrow -t$. La question 1.3) assure alors que

$$\oint_{[-R, -\varepsilon]} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = e^{ip\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{t^p}{(1+t^2)^2} dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

1.8) Si $|z| = \varepsilon \in]0, 1]$, alors

$$\left| \frac{z^p}{(1+z^2)^2} \right| = \frac{|z|^p}{|1+z^2|^2} \leq \frac{\varepsilon^p}{(1-\varepsilon^2)^2},$$

l'inégalité venant de la seconde inégalité triangulaire. Ainsi, par majoration standard,

$$\left| \oint_{c_\varepsilon} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz \right| \leq \pi \varepsilon \frac{\varepsilon^p}{(1-\varepsilon^2)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

à condition que $1+p > 0$, c'est-à-dire que $p > -1$.

1.9) Si $|z| = R > 1$, alors

$$\left| \frac{z^p}{(1+z^2)^2} \right| = \frac{|z|^p}{|1+z^2|^2} \leq \frac{R^p}{(R^2-1)^2},$$

l'inégalité venant de la seconde inégalité triangulaire. Ainsi, par majoration standard,

$$\left| \oint_{C_R} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz \right| \leq \pi R \frac{R^p}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

à condition que $1+p < 4$, c'est-à-dire que $p < 3$.

1.10) On suppose que $0 < \varepsilon < 1 < R$. Alors, la fonction $z \mapsto \frac{z^p}{(1+z^2)^2}$ est holomorphe sur $U \setminus \{i\}$ et le support du lacet $\gamma(\varepsilon, R)$ est contenu dans cet ouvert. Puisque le lacet est (évidemment) U -homotope à zéro — à vrai dire, U est étoilé (centre i par exemple) donc simplement connexe —, la formule des résidus appliquée à cette configuration fournit l'égalité

$$\int_{\gamma(\varepsilon, R)} \frac{z^p}{(1+z^2)^2} dz = 2i\pi \operatorname{Ind}_i(\gamma(\varepsilon, R)) = 2i\pi \frac{p-1}{4} i^{p+1} = \frac{1-p}{2} \pi i^p.$$

Par ailleurs, compte tenu des questions précédentes, l'intégrale curviligne, qui est la somme des intégrales le long des quatre chemins $[\varepsilon, r]$, C_R , $[-R, -\varepsilon]$ et c_ε tend, lorsque ε tend vers 0 et R vers $+\infty$, vers

$$(1 + e^{ip\pi}) I(p).$$

Par passage à la limite, on obtient ainsi l'égalité demandée.

1.11) Si $p \in]-1, 3[\setminus \{1\}$, la formule de la question précédente est valide et $1 + e^{ip\pi} \neq 0$, si bien que

$$I(p) = \frac{\pi(1-p)}{2} \frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{ip\pi}} = \frac{\pi(1-p)}{2} \frac{1}{2 \cos \frac{p\pi}{2}} = \frac{\pi(1-p)}{4 \cos \left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Noter que l'on utilise ici que $i^p = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^p = e^{ip\frac{\pi}{2}}$, la dernière égalité venant du fait que $\frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, et donc que $\log\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = i\frac{\pi}{2}$.

- Pour la valeur en $p = 1$, il suffit de calculer une (fraction rationnelle) primitive de $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ pour montrer que $I(1) = \frac{1}{2}$. [On peut aussi montrer que $I(p)$ est une fonction continue de p et que $\frac{\pi(1-p)}{4 \cos \left(\frac{p\pi}{2}\right)}$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque p tend vers 1].

- Lorsque p est un réel hors de l'intervalle $] -1, 3[$, la fonction positive $t \mapsto \frac{t^p}{(1+t^2)^2}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, et $I(p) = +\infty$ (au sens de Lebesgue, bien sûr).

2 Fonction de Scorer

2.1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $|e^z| = e^{\Re(z)} \leq e^{|z|}$. On peut aussi passer à la limite dans l'inégalité triangulaire :

$$|e^z| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}.$$

2.2) Soit $r \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{rt - \frac{t^3}{6}} = 0.$$

Il existe donc $M(r) > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$,

$$e^{rt - t^3/3} = e^{rt - \frac{t^3}{6}} e^{-\frac{t^3}{6}} \leq M(r) e^{-\frac{t^3}{6}}.$$

Or, $t \mapsto e^{-\frac{t^3}{6}}$ est (évidemment) intégrable sur $[0, +\infty[$; il est donc de même pour $t \mapsto e^{rt - t^3/3}$.

2.3) Soit $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ dans le disque (fermé) de centre 0 et de rayon r . Alors, la première question et l'inégalité de la question précédente montrent que

$$\forall t \geq 0, \quad \left| e^{tz - \frac{t^3}{3}} \right| \leq e^{tr - \frac{t^3}{3}} \leq M(r) e^{-\frac{t^3}{6}}.$$

Cette inégalité est une inégalité de domination sur le disque (fermé) de centre 0 et de rayon r . Puisque $z \mapsto e^{tz - \frac{t^3}{3}}$ est (évidemment) entière pour tout $t \geq 0$, le théorème sur les intégrales à paramètres holomorphes montre que Hi est holomorphe sur le disque (ouvert) de centre 0 et de rayon r . Comme ces disques recouvrent $\mathbb{C}$, on a montré que Hi est une fonction entière.

2.4) On reprend l'argument de la question précédente. Conséquence de l'application du théorème sur les intégrales à paramètre holomorphe : le calcul des dérivées successives de Hi sur tout disque ouvert centré à l'origine se fait en dérivant sous le signe somme. C'est donc vrai sur $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\text{Hi}'(z) = \int_0^{+\infty} t e^{tz - \frac{t^3}{3}} dt \quad \text{et} \quad \text{Hi}''(z) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{tz - \frac{t^3}{3}} dt,$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \text{Hi}''(z) - z \text{Hi}'(z) &= \int_0^{+\infty} (t^2 - z) e^{tz - \frac{t^3}{3}} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{tz - \frac{t^3}{3}} \right) dt \\ &= - \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\int_0^X \frac{d}{dt} \left(e^{tz - \frac{t^3}{3}} \right) dt \right) \\ &= - \left(\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{Xz - \frac{X^3}{3}} - 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Enfin, les valeurs en 0 se calculent *via* le changement de variable $x = \frac{t^3}{3}$ sous l'intégrale, selon les calculs

$$\text{Hi}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^3}{3}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x} 3^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{2}{3}}}$$

et

$$\text{Hi}'(0) = \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^3}{3}} dt = \int_0^{+\infty} 3^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} 3^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^{\frac{1}{3}}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.5) D'abord, ce rayon est $+\infty$ puisque Hi est entière. Ensuite, on note

$$b_n = \frac{3^{\frac{n-2}{3}}}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right),$$

pour tout $n \geq 0$.

Première méthode

On reporte le $\text{DSE}(0) \sum_n a_n z^n$ de Hi dans l'équation différentielle, ce qui implique, grâce à l'unicité d'un DSE , que $a_2 = \frac{1}{2} = b_2$ et que $a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$ pour tout $n \geq 0$. La question précédente assure par ailleurs que $a_0 = b_0$ et $a_1 = b_1$. Cela montre que la formule cherchée est satisfaite pour $n \in \{0, 1, 2\}$. En outre, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{b_{n+3}}{b_n} = 3 \frac{n!}{(n+3)!} \frac{\Gamma\left(\frac{n+4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)} = 3 \frac{n!}{(n+3)!} \frac{n+1}{3} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}.$$

Les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ vérifient la même relation de récurrence (linéaire) d'ordre 3 et coïncident aux rangs 0, 1 et 2 : elles sont égales.

Deuxième méthode

Le $\text{DSE}(0)$ de Hi est son développement de Taylor : $a_n = \frac{\text{Hi}^{(n)}(0)}{n!}$, pour tout $n \geq 0$. Les questions **2)** et **3)** montrent, grâce au théorème sur les intégrales à paramètre holomorphe, que, pour tout $n \geq 0$,

$$\text{Hi}^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^3}{3}} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} 3^{\frac{n}{3}} x^{\frac{n}{3}} e^{-x} 3^{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{3^{\frac{n-2}{3}}}{n!} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n-2}{3}} e^{-x} dx = b_n$$

ce qui est la formule demandée. Noter que la deuxième égalité de la suite ci-dessus résulte (immédiatement) du changement de variable $x = \frac{t^3}{3}$ sous l'intégrale.

Examen partiel

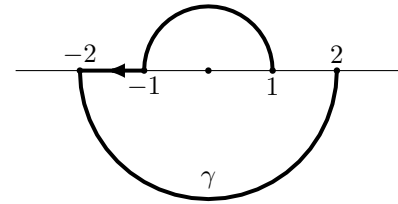
– durée : une heure sept minutes et trente secondes –

— *L'homotopie de deux chemins ou la connexité d'un ouvert, si on doit s'en servir, pourront être affirmées sans justification, à condition qu'elles soient vraies et illustrées par un dessin.* —

1 Un logarithme (4 points)

1.1) On note γ “le” chemin de $\mathbb{C}$ qui part de 1, suit simplement le demi-cercle unité du demi-plan des parties imaginaires positives jusqu'au point -1 , puis le segment $[-1, -2]$, et enfin le demi-cercle de rayon 2 centré en l'origine du demi-plan des parties imaginaires négatives jusqu'au point 2. On en représente le support ci-contre.

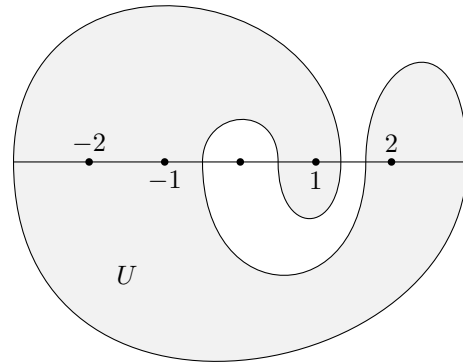
Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.



1.2) Soit U , ouvert simplement connexe et connexe de $\mathbb{C}$, dont on dessine une représentation grisée ci-contre. On note $\log$ l'unique logarithme sur U qui prend la valeur 0 en 1.

Calculer $\log(2)$.

[A titre de bonus, hors barème, on expliquera pourquoi il est inutile de mieux définir U pour que la question ait un sens.]



2 Une intégralicule (8 points)

Si w est un nombre complexe, on note $\Re(w)$ la partie réelle de w . On se rappellera que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on ne demande pas de démontrer cela ici. On note

$$V = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z^2) > 0\}.$$

2.1) Sans argumenter (une fois n'est pas coutume), dessiner V et donner le nombre de ses composantes connexes.

2.2) Pour tout $\alpha > 0$, on note $V_{\alpha} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z^2) > \alpha\}$. Montrer soigneusement que

$$\forall \alpha > 0, \forall t \geq 0, \forall z \in V_{\alpha}, \left| e^{-z^2 t^2} \right| \leq e^{-\alpha t^2}.$$

2.3) Montrer que la fonction $f : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-z^2 t^2} dt$ est holomorphe sur V .

2.4) Montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$, pour tout $x > 0$.

2.5) Trouver l'ensemble des nombres complexes $z \in V$ pour lesquels $\int_0^{+\infty} e^{-z^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}$.

3 Eneström-Kakeya (8 points)

On note $\overline{D}$ le disque unité fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et $\partial D = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ son bord.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$ un polynôme de degré $d \geq 1$ et à coefficients réels. On suppose que

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_d.$$

L'objet de cette partie est de démontrer l'assertion suivante :

dans ces conditions, tous les zéros complexes de P sont dans $\overline{D}$.

3.1) Soit f le polynôme défini par la formule

$$f(z) = a_d z^{d+1} + (1-z)P(z).$$

Calculer les coefficients de f et en déduire que $|f(z)| \leq a_d$, pour tout $z \in \partial D$.

3.2) On note $g(z) = z^d f\left(\frac{1}{z}\right)$ le *polynôme aux inverses* de f . Montrer que

$$\max_{z \in \partial D} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |g(z)|$$

3.3) Dédurre soigneusement des questions précédentes que $\max_{z \in \overline{D}} |g(z)| \leq a_d$.

3.4) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| \geq 1 \implies |f(z)| \leq a_d |z|^d.$$

3.5) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| \geq 1 \implies |(1-z)P(z)| \geq a_d |z|^d (|z| - 1).$$

et en conclure que les zéros de P sont tous dans $\overline{D}$.

Examen partiel : un corrigé succinct

1 Un logarithme

1.1) On peut directement faire le calcul en paramétrant les deux demi-cercles et le segment à la façon habituelle. On trouve

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} + \int_0^1 \frac{-dt}{(1-t)(-1) + t(-2)} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = 2i\pi + \ln 2.$$

On peut aussi remarquer que le chemin γ est (évidemment) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotope au chemin δ suivant : on part de 1, on parcourt simplement le cercle unité une fois dans le sens direct, puis le segment $[1, 2]$. Puisque $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'intégrale cherchée est $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\delta} \frac{dz}{z} = 2i\pi + \int_1^2 \frac{dt}{t} = 2i\pi + \ln 2$.

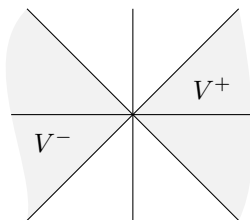
1.2) La fonction log de l'énoncé est $\log(z) = \int_{[1 \rightarrow z]} \frac{dz}{z}$ où $[1 \rightarrow z]$ désigne n'importe quel chemin de U dont l'origine est 1 et l'extrémité est z — la connexité de U garantit l'existence d'un tel chemin, la simple connexité de U garantit que l'intégrale ne dépend pas du choix du chemin choisi. Ainsi, en particulier, puisque le support de γ est (manifestement) contenu dans U

$$\log 2 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln 2 + 2i\pi.$$

L'ouvert U contient le support du chemin γ , ou en tout cas le support d'un chemin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotope à γ . Si U est n'importe quel ouvert connexe et simplement connexe qui contient le support d'un tel chemin, l'unique logarithme sur U s'annulant en 1 sera donné par l'intégrale ci-dessus. En particulier, la valeur en 2 de ce logarithme sera toujours l'intégrale de la question 1. Pour donner un sens à la question, il suffit de suggérer par le dessin un ouvert connexe et simplement connexe qui contienne le support d'un chemin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -homotope à γ .

2 Une intégralique

2.1)



La zone grisée représente V , qui est le lieu des points de coordonnées (x, y) telles que $x^2 - y^2 > 0$, c'est-à-dire telles que $x - y$ et $x + y$ soient de même signe.

L'ouvert V a deux composantes connexes qui sont respectivement

$$V^+ = \{(x, y), x - y > 0 \text{ et } x + y > 0\}$$

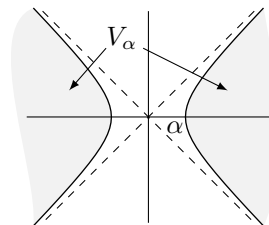
$$\text{et } V^- = \{(x, y), x - y < 0 \text{ et } x + y < 0\}.$$

2.2)

A toutes fins utiles, on dessine un V_{α} ci-contre.

Soient $\alpha > 0$, $t \geq 0$ et $z \in V_{\alpha}$. Alors,

$$|e^{-z^2 t^2}| = e^{\Re(-z^2 t^2)} = e^{-t^2 \Re(z^2)} \leq e^{-\alpha t^2}.$$



2.3) Soit $\alpha > 0$. L'inégalité de la question précédente est une inégalité de domination sur V_{α} . D'une part, pour tout $z \in V_{\alpha}$, la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t^2}$ est (évidemment) intégrable (mesurable suffit, à vrai dire) sur $[0, +\infty[$. D'autre part, pour tout $t \geq 0$, la fonction $z \mapsto e^{-t^2 z^2}$ est (évidemment) holomorphe sur V_{α} . On en déduit, *via* le théorème

sur les intégrales à paramètres holomorphes, que f est holomorphe sur V_α . Enfin, puisque V est l'union des V_α , $\alpha > 0$, cela suffit à prouver que f est holomorphe sur V .

2.4) Soit $x > 0$. Un simple changement de variable sous l'intégrale, en posant $s = tx$, montre directement que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} \frac{ds}{x} = \frac{1}{x} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.5) D'une part, V^+ est connexe — pour la notation, voir le corrigé de la question 1). D'autre part, les fonctions f et $z \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{2z}$, toutes les deux holomorphes sur V^+ , sont égales sur $]0, +\infty[$. Enfin, $]0, +\infty[$ est une partie non discrète de V^+ . Le principe du prolongement analytique permet alors de conclure que $f(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}$ pour tout $z \in V^+$.

Par ailleurs, f est (évidemment) une fonction paire, ce qui montre que $f(z) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2z}$ pour tout $z \in V^-$. En particulier, pour tout $z \in V^-$, la formule $f(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}$ est fausse.

Conclusion : l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\int_0^{+\infty} e^{-z^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}$ est l'ouvert

$$V^+ = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) - \Im(z) > 0 \text{ et } \Re(z) + \Im(z) > 0\}.$$

3 Eneström-Kakeya

3.1) Un calcul direct montre que

$$f(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_d - a_{d-1})z^d = a_0 + \sum_{k=1}^d (a_k - a_{k-1})z^k.$$

Alors, si $|z| = 1$, la première inégalité triangulaire assure que, puisque les a_k sont positifs et décroissants, que

$$|f(z)| \leq |a_0| + |a_1 - a_0| + \cdots + |a_d - a_{d-1}| = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_d - a_{d-1}) = a_d.$$

3.2) Pour tout $z \in \partial D$, $|g(z)| = \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right|$, et $z \mapsto 1/z$ est (évidemment) une bijection de ∂D sur lui-même. On en déduit immédiatement que

$$\max_{z \in \partial D} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \max_{z \in \partial D} |g(z)|.$$

3.3) Les deux questions précédentes montrent immédiatement que $\max_{z \in \partial D} |g(z)| \leq a_d$. Or, g est (évidemment) une fonction polynomiale. En particulier, g est holomorphe sur le disque unité ouvert et est continue sur $\overline{D}$. Le principe du module maximum assure alors que le maximum de $|g|$ sur le compact $\overline{D}$ est atteint sur son bord ∂D , la valeur de ce maximum étant, on vient de le montrer, inférieure ou égale à a_d : on a démontré que $\max_{z \in \overline{D}} |g(z)| \leq a_d$.

3.4) On vient de montrer que $|g(z)| \leq a_d$ dès que $|z| \leq 1$. Ecrite à l'aide de f , cette inégalité s'écrit :

$$|z| \leq 1 \implies \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq a_d \times \left|\frac{1}{z}\right|^d.$$

En remplaçant z par $1/z$, cela s'écrit encore

$$|z| \geq 1 \implies |f(z)| \leq a_d |z|^d.$$

3.5) Soit z un nombre complexe de module supérieur ou égal à 1. On vient de voir qu'alors, $|f(z)| \leq a_d |z|^d$. Il vient successivement

$$\begin{aligned} |(1-z)P(z)| &= |f(z) - a_d z^{d+1}| \\ &\geq |a_d z^{d+1}| - |f(z)| \\ &\geq |a_d z^{d+1}| - |a_d z^d| \\ &= a_d |z|^d (|z| - 1), \end{aligned}$$

le première de ces inégalités venant de la seconde inégalité triangulaire. Cela montre en particulier que si $|z| > 1$, alors $P(z) \neq 0$. On a montré que les zéros de P sont tous dans $\overline{D}$.

Contrôle continu : épreuve de remplacement

(durée : une heure et demie)

— Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve —

1 Un calcul d'intégrale [13 points]

Soit $\alpha \in]0, 1[$. L'objet de cette partie consiste à montrer la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}. \quad (1)$$

Dans toute cette partie, également, on note $\log$ l'unique détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ qui prend la valeur $i\pi$ en -1 . En outre, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, on note $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$.

1.1) Justifier rapidement mais avec précision que l'intégrale de la formule (1) a du sens.

1.2) Calculer $\log(i)$ et $\log(-i)$.

1.3) Calculer avec soin les résidus de la fonction $z \mapsto \frac{z^\alpha}{1+z^2}$ en ses pôles.

1.4) Montrer que pour tous $x > 0$ et $y > 0$,

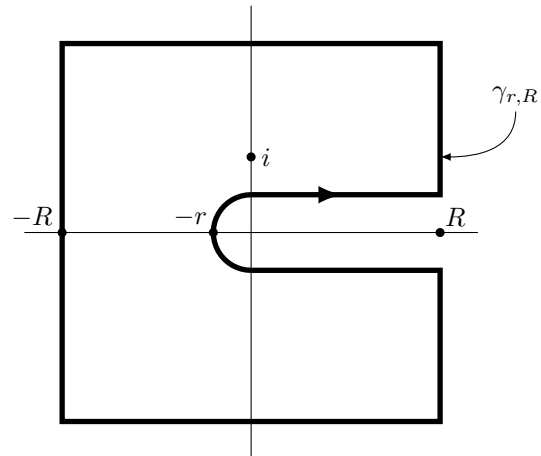
$$(x + iy)^\alpha = |x + iy|^\alpha e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})} \quad \text{et} \quad (x - iy)^\alpha = |x - iy|^\alpha e^{i\alpha(2\pi - \arctan(\frac{y}{x}))}$$

1.5) Lorsque r et R sont des nombres réels vérifiant $0 < r < 1 < R$, on note

$$I_{r,R} = \int_{\gamma_{r,R}} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz \quad (2)$$

où $\gamma_{r,R}$ est “le” lacet ci-contre, parcouru une fois dans le sens direct — les lignes droites du support dessiné représentent des segments parallèles aux axes de coordonnées, la partie courbe représente un demi-cercle.

Expliquer brièvement pourquoi l'énoncé place des guillemets autour du “le” ci-dessus, et pourquoi l'intégrale curviligne (2) est définie sans ambiguïté.



1.6) Soit $R > 1$. Montrer que l'intégrale curviligne de $\frac{z^\alpha}{1+z^2}$ le long du segment $[ir, R+ir]$ tend vers $\int_0^R \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ lorsque r tend vers 0 en restant strictement positif.

1.7) Montrer que l'intégrale curviligne de $\frac{z^\alpha}{1+z^2}$ le long du segment $[R-ir, -ir]$ tend vers $-e^{2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ lorsque r tend vers 0 en restant strictement positif.

1.8) Montrer que l'intégrale curviligne de $\frac{z^\alpha}{1+z^2}$ le long du demi-cercle de centre 0 et de rayon r qui intervient dans $\gamma_{r,R}$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

1.9) Montrer que l'intégrale de $\frac{z^\alpha}{1+z^2}$ le long de la réunion des cinq segments $[R+ir, R+iR]$, $[R+iR, -R+iR]$, $[-R+iR, -R-iR]$, $[-R-iR, R-iR]$ et $[R-iR, R-ir]$ qui intervient dans le chemin $\gamma_{r,R}$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.

1.10) Démontrer la formule (1).

2 Validité d'une formule [7 points]

2.1) Donner le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction

$$z \mapsto \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}$$

est holomorphe.

2.2) On note V l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la fonction

$$t \mapsto \frac{t^z}{1+t^2}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $V = \{z \in \mathbb{C}, -1 < \Re(z) < 1\}$.

2.3) La fonction

$$z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{1+t^2} dt$$

est-elle holomorphe sur V ?

2.4) La formule (1) est-elle valide pour tout nombre complexe $\alpha \in V$?

Epreuve de remplacement : un corrigé succinct

1 Un calcul d'intégrale

1.1) En 0, puisque $\alpha > 0$, l'intégrand se prolonge par continuité — par 0. Par ailleurs, $\frac{t^\alpha}{1+t^2} \sim t^{\alpha-2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et, puisque $\alpha < 1$, l'intégrale sur $[1, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto t^{\alpha-2}$ est convergente. Par comparaison des intégrales de fonctions positives, cela montre l'intégrabilité demandée.

1.2) Puisque $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ et puisque $\frac{\pi}{2} \in]0, 2\pi[$, on obtient $\log(i) = \frac{i\pi}{2}$. D'autre part, puisque $-i = e^{\frac{3i\pi}{2}}$ et puisque $\frac{3\pi}{2} \in]0, 2\pi[$, on obtient $\log(-i) = \frac{3i\pi}{2}$.

1.3) Les deux pôles sont simples. La formule “ $\frac{f(p)}{g'(p)}$ ” s'applique. On trouve directement, en s'appuyant si l'on veut sur la question **1.2**,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}, i\right) = \frac{e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}}{2i} \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}\left(\frac{z^\alpha}{1+z^2}, -i\right) = \frac{e^{\frac{3i\alpha\pi}{2}}}{-2i}.$$

1.4) Les nombres x et y étant réels et x strictement positif, on a toujours $x + iy = |x + iy|e^{i \arctan \frac{y}{x}}$.

[En cas de doute, écrire pour soi dans un coin $x + iy = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et s'assurer que $r = |x + iy|$ et $\tan \theta = \frac{y}{x}$, puis inverser avec l'arctangente en prenant garde au signe du cosinus (du signe de x , en somme).]

Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\arctan \frac{y}{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\log(x + iy) = \ln|x + iy| + i \arctan \frac{y}{x}$, dont on déduit que $(x + iy)^\alpha = |x + iy|^\alpha e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})}$.

Toujours si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\arctan \frac{-y}{x} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et donc $\log(x - iy) = \ln|x - iy| + i(2\pi - \arctan \frac{y}{x})$, dont on déduit que $(x - iy)^\alpha = |x - iy|^\alpha e^{i\alpha(2\pi - \arctan(\frac{y}{x}))}$.

1.5) L'intégrale d'une fonction (continue) le long d'un lacet ne dépend pas du choix de l'origine dudit lacet. D'autre part, par changement de variable sous l'intégrale, l'intégrale d'une fonction (continue) le long d'un chemin ne dépend que de la classe d'équivalence du chemin. Ces deux propriétés rendent l'intégrale de l'énoncé indépendante des choix de l'origine et de la paramétrisation du lacet.

1.6) En paramétrant le segment par le chemin $[0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t + ir$, puis en utilisant la question **1.3**, on obtient successivement

$$\int_{[ir, R+ir]} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz = \int_0^R \frac{(t+ir)^\alpha}{1+(t+ir)^2} dt = \int_0^R \frac{|t+ir|^\alpha e^{i\alpha \arctan \frac{r}{t}}}{1+(t+ir)^2} dt.$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, $r > 0$, cette dernière intégrale tend vers $\int_0^R \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$, comme le garantit l'inégalité de domination

$$\forall t \in [0, R], \forall r \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \left| \frac{|t+ir|^\alpha e^{i\alpha \arctan \frac{r}{t}}}{1+(t+ir)^2} \right| = \frac{|t+ir|^\alpha}{|1+t^2-r^2+2irt|} \leq \frac{(t^2+r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{t^2+1-r^2} \leq \frac{(t^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}{t^2+\frac{3}{4}},$$

cette dernière expression étant celle d'une fonction continue — donc intégrable — sur le compact $[0, R]$.

1.7) En paramétrant le segment par le chemin $[-R, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto -t - ir$, puis en effectuant le changement de variable $t \rightsquigarrow -t$ sous l'intégrale, puis en utilisant la question **1.3**, on obtient successivement

$$\int_{[R-ir, -ir]} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz = - \int_{-R}^0 \frac{(-t-ir)^\alpha}{1+(t+ir)^2} dt = - \int_0^R \frac{(t-ir)^\alpha}{1+(t-ir)^2} dt = - \int_0^R \frac{|t-ir|^\alpha e^{i\alpha(2\pi - \arctan \frac{r}{t})}}{1+(t-ir)^2} dt.$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, $r > 0$, cette dernière intégrale tend vers $-e^{2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$, comme le garantit à nouveau l'inégalité de domination

$$\forall t \in [0, R], \forall r \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \left| \frac{|t - ir|^\alpha e^{i\alpha(2\pi - \arctan \frac{r}{t})}}{1 + (t - ir)^2} \right| = \frac{|t - ir|^\alpha}{|1 + t^2 - r^2 - 2irt|} \leq \frac{(t^2 + 1)^{\frac{\alpha}{2}}}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

1.8) On note c_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r , parcouru une fois de $-ir$ à ir dans le sens indirect. Pour tout z dans le support de c_r ,

$$\left| \frac{z^\alpha}{1 + z^2} \right| = \frac{r^\alpha}{|1 + z^2|} \leq \frac{r^\alpha}{1 - r^2},$$

l'inégalité résultant de la seconde inégalité triangulaire. Ainsi, par majoration standard, puisque $\alpha > 0$,

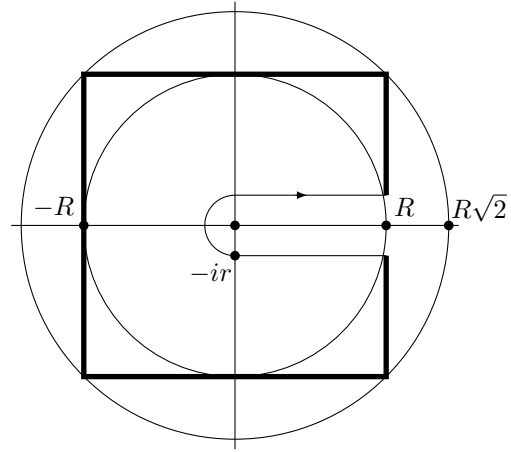
$$\left| \int_{c_r} \frac{z^\alpha}{1 + z^2} dz \right| \leq \frac{r^\alpha}{1 - r^2} \times \pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

1.9) On note C_R la partie de $\gamma_{r,R}$ dont le support est tracé sur le carré dont les sommets sont $R(1+i)$, $-R(1-i)$, $-R(1+i)$ et $R(1-i)$. Si z dans le support de C_R , alors $R \leq |z| \leq R\sqrt{2}$, si bien que, grâce à la seconde inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{z^\alpha}{1 + z^2} \right| \leq \frac{(R\sqrt{2})^\alpha}{R^2 - 1}.$$

Ainsi, par majoration standard, puisque $\alpha < 1$,

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^\alpha}{1 + z^2} dz \right| \leq 2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{R^\alpha}{R^2 - 1} \times 4R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$



1.10) On applique la formule des résidus à l'intégrale curviligne de la question **1.4**. On obtient

$$\forall r \in]0, 1[, \forall R > 1, 2i\pi \left(\frac{e^{\frac{i\alpha\pi}{2}}}{2i} + \frac{e^{\frac{3i\alpha\pi}{2}}}{-2i} \right) = \pi e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} (1 - e^{i\pi\alpha}) = \int_{\gamma_{r,R}} \frac{z^\alpha}{1 + z^2} dz.$$

On fait tendre d'abord r vers 0 en restant strictement positif, puis R vers $+\infty$. Avec les résultats des questions précédentes, on obtient

$$\pi e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} (1 - e^{i\pi\alpha}) = (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^2} dt,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^2} dt = \pi e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} \frac{1 - e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{2i\pi\alpha}} = \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

2 Validité d'une formule [7 points]

2.1) L'ouvert cherché est le complémentaire des zéros de $z \mapsto \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)$, à savoir $\mathbb{C} \setminus (1 + 2\mathbb{Z})$.

2.2) Soient $t > 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors, $t^z = \exp(z \ln t)$ est bien défini et

$$\left| \frac{t^z}{1 + t^2} \right| = \frac{t^{\Re(z)}}{1 + t^2}$$

définit une fonction de t intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si $-1 < \Re(z) < 1$, l'inégalité de gauche garantissant de la convergence en 0 de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\Re(z)}}{1+t^2} dt$, celle de droite étant imposée par sa convergence en $+\infty$. C'est cela qu'il fallait démontrer.

2.3) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note

$$V_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, -1 + \varepsilon < \Re(z) < 1 - \varepsilon\}.$$

Il suffit de trouver une inégalité de domination pour $t > 0$ et $z \in V_\varepsilon$ pour montrer que la fonction $\varphi : z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{1+t^2} dt$ est holomorphe sur V_ε , puisque $z \mapsto \frac{t^z}{1+t^2}$ est holomorphe sur V_ε , pour tout $t > 0$. Or,

$$\forall t > 0, \forall z \in V_\varepsilon, \left| \frac{t^z}{1+t^2} \right| = \frac{t^{\Re(z)}}{1+t^2} \leq \frac{\max\{t^{1-\varepsilon}, t^{-1+\varepsilon}\}}{1+t^2}$$

et la fonction $t \mapsto \frac{\max\{t^{1-\varepsilon}, t^{-1+\varepsilon}\}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ — pour davantage de limpidité, on peut rédiger moins concisément en distinguant les cas $t < 1$ et $t > 1$ pour séparer les convergences en 0 et en $+\infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, la fonction φ est holomorphe sur V_ε . Elle est donc holomorphe sur la réunion des ouverts V_ε qui est V tout entier.

2.4) Les deux membres de l'égalité définissent des fonctions de α holomorphes sur V . En outre, comme le montre la partie 1, l'égalité est vraie sur l'intervalle $]0, 1[$ qui est une partie non discrète du connexe V . Par prolongement analytique, cela entraîne que la formule est valide pour tout $\alpha \in V$.

Examen

– durée : deux heures –

— Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve —

Dans tout ce texte, si z est un nombre complexe, les symboles $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z .

1 Elle croît [6 points]

Soient $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R . Pour tout $r \in [0, R[$, on note

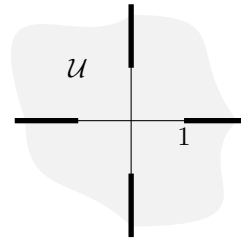
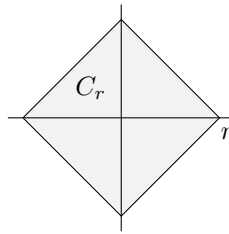
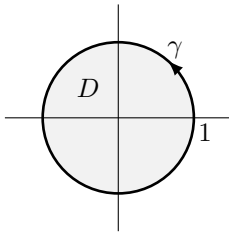
$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

- 1.1) Montrer que M est une fonction croissante.
- 1.2) Est-il vrai que si f n'est pas constante, alors M est une fonction strictement croissante ?
- 1.3) Calculer $M(r)$ pour tout $r \in [0, 1[$ lorsque f est la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

2 Un aperçu de Schwarz-Christoffel [14 points]

Dans toute cette partie, on note

- (i) $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et $\overline{D}$ son adhérence topologique
- (ii) γ le lacet du plan complexe défini par $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = \exp(it)$
- (iii) pour tout $r > 0$, $C_r = \{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| + |\Im(z)| < r\}$ et $\overline{C_r}$ l'adhérence topologique de C_r .
- (iv) $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est la réunion des quatre demi-droites $\{t, t \geq 1\}$, $\{it, t \geq 1\}$, $\{-t, t \geq 1\}$ et $\{-it, t \geq 1\}$
- (v) $\sqrt{z}$ la racine carrée principale du nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.



- 2.1) Montrer que $\mathcal{U}$ est l'image réciproque du plan coupé $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par l'application $z \mapsto 1 - z^4$.
- 2.2) Pour tout $z \in \mathcal{U}$, on note

$$F(z) = \int_{[0 \rightsquigarrow z]} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^4}}$$

où la notation $[0 \rightsquigarrow z]$ désigne n'importe quel chemin de $\mathcal{U}$ dont l'origine est 0 et l'extrémité z . Expliquer brièvement pourquoi la fonction F est bien définie dans le sens où l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi.

2.3) Montrer que

$$\forall z \in \mathcal{U}, F(z) = z \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}z^4}$$

et en déduire que $F(iz) = iF(z)$, pour tout $z \in \mathcal{U}$.

2.4) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est intégrable sur $[0, 1]$. On note $\beta = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2.5) Montrer que $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} F(z) = \beta$. On notera encore F le prolongement par continuité de F à $\mathcal{U} \cup \{1\}$. En particulier,

$$F(1) = \beta > 0.$$

2.6) Soit $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(i) Montrer soigneusement que l'argument principal de $\sqrt{1-z^4}$ est $\theta - \frac{\pi}{4}$.

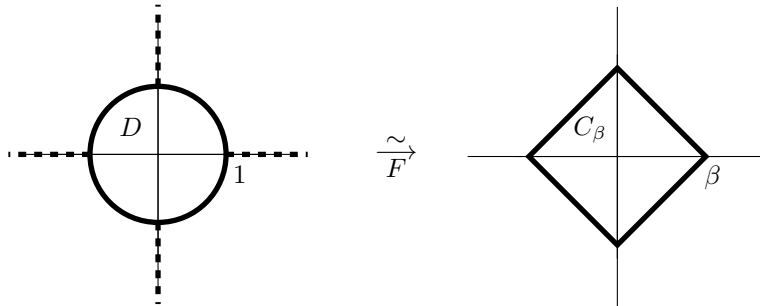
(ii) En déduire que

$$F(z) - F(1) = e^{\frac{3i\pi}{4}} \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{2} \sin 2t}$$

— on argumentera rapidement sur l'intégrabilité de l'intégrand de cette dernière intégrale.

(iii) On note O l'origine du plan, B le point d'affixe $F(1)$ et M_z le point d'affixe $F(z)$. Démontrer que l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM_z})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{4}$.

2.7) En utilisant le résultat de la question **2.3**, montrer que F se prolonge par continuité sur $\mathcal{U} \cup \{1, i, -1, -i\}$ et que la restriction de F au cercle unité induit un homéomorphisme entre ∂D et ∂C_β . Le dessin ci-dessous résume la situation.



2.8) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \partial D$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz = \text{Ind}_{F \circ \gamma}(w),$$

où la notation $\text{Ind}_\Gamma(w)$ désigne l'indice du point w par rapport au lacet Γ .

2.9) Montrer que la restriction de F à D induit un difféomorphisme analytique entre le disque ouvert D et le carré ouvert C_β .

On pourra si on veut s'appuyer sur l'assertion suivante, contenue dans les énoncés du cours et corollaire de la formule des résidus : soit f une fonction continue sur $\bar{D}$, holomorphe sur D et non constante. Soit aussi $w \in \mathbb{C}$. Alors, le nombre de $z \in D$ solutions de l'équation $f(z) = w$, comptées avec leurs multiplicités, égale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

Examen : un corrigé succinct

1 Elle croît

1.1) Soient r et s tels que $0 \leq r < s < R$. Puisque f est holomorphe sur le disque ouvert de rayon s et continue sur le disque fermé de même rayon s , le principe du module maximum impose que $|f(z)| \leq \max_{|z|=s} |f| = M(s)$, pour tout z vérifiant $|z| < s$. En particulier, en passant à la borne supérieure sur le cercle de rayon r , on obtient $M(r) \leq M(s)$. Cela montre la croissance de M .

1.2) Si M n'est pas strictement croissante, soient r et s vérifiant $0 < r < s < R$ et $M(r) = M(s)$. Alors, la restriction de $|f|$ au disque de rayon s atteint son maximum en un point du cercle de rayon r qui n'est pas au bord du disque de rayon s . Comme ce disque est connexe, cela entraîne — en vertu du principe du module maximum — que f est constante sur le disque de rayon s . Comme ce dernier n'est pas une partie discrète et puisque le disque de rayon R est encore connexe, cela implique — par prolongement analytique — que f est constante sur le disque de rayon R tout entier.

1.3) On est dans le cas où $R = 1$ et $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Si $|z| < 1$, alors la seconde inégalité triangulaire implique que $|1 - z| \geq 1 - |z|$, ou encore que $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, et donc que $M(r) \leq \frac{1}{1-r}$ pour tout $r \in [0, 1[$. Comme $f(r) = \frac{1}{1-r}$ lorsque $0 \leq r < 1$, cela montre que $M(r) = \frac{1}{1-r}$.

2 Un aperçu de Schwarz-Christoffel

2.1) On note $P(z) = 1 - z^4$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $z \in P^{-1}([-\infty, 0])$ si, et seulement si $z^4 - 1 \in [0, +\infty[$. Autrement dit, $z \in P^{-1}(\mathcal{F})$ si, et seulement s'il existe $t \geq 0$ tel que $z^4 = 1 + t$. L'ensemble des solutions de cette dernière équation est constitué des quatre nombres complexes $i^k \sqrt[4]{1+t}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ce qui montre que $P^{-1}([-\infty, 0]) = \mathcal{F}$. Il s'en suit immédiatement que $P^{-1}(\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]) = \mathcal{U}$.

2.2) L'ouvert $\mathcal{U}$ est étoilé par rapport à l'origine. En particulier, il est connexe par arcs et simplement connexe. Puisqu'il est connexe par arcs, tout point de $\mathcal{U}$ est l'extrémité d'un chemin d'origine 0 — par exemple, le segment $[0, z]$ paramétré de façon standard. L'ensemble des chemins dans la définition proposée de F est ainsi non vide. Ensuite, $\mathcal{U}$ est simplement connexe et la fonction intégrée est holomorphe sur $\mathcal{U}$ comme l'assure la question précédente. Cela garantit que l'intégrale de cette fonction le long de n'importe quel chemin de $\mathcal{U}$ ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de ce chemin, ce qui donne un sens non ambigu à la définition de F .

2.3) On intègre le long du segment $[0, z]$ paramétré de façon standard : il vient directement $F(z) = \int_0^1 \frac{z dt}{\sqrt{1-t^4 z^4}}$, ce qu'il fallait démontrer. Alors, $F(iz) = iz \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4 (iz)^4}} = iz \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4 z^4}} = iF(z)$.

2.4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$. Un outre, $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ lorsque x tend vers 1 à gauche de 1, et $x \mapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ est une intégrale (de Riemann) convergente en 1. Par comparaison des intégrales de fonctions positives, cela montre que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ est intégrable sur $[0, 1]$.

2.5) Il résulte de la définition de la racine quatrième et de la seconde inégalité triangulaire que

$$\forall x \in [0, 1[, \forall z \in \overline{D}, \quad \left| \frac{1}{\sqrt{1-x^4 z^4}} \right| = \frac{1}{\sqrt{|1-x^4 z^4|}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^4}};$$

puisque le dernier membre de cette inégalité est intégrable sur $[0, 1]$ — c'est la question qui précède —, cette

inégalité de domination montre que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| \leq 1}} F(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \beta.$$

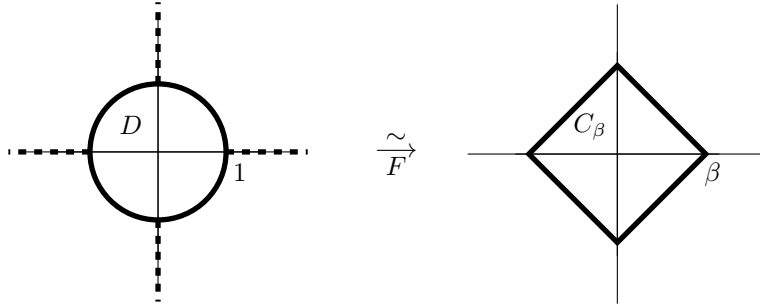
2.6) (i) Avec les notations de l'énoncé, $1 - z^4 = 1 - e^{4i\theta} = -2ie^{2i\theta} \sin 2\theta = (2 \sin 2\theta) e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})}$. Ainsi, puisque $2 \sin 2\theta > 0$ et puisque $2\theta - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subseteq]-\pi, \pi[$ le nombre $2\theta - \frac{\pi}{2}$ est l'argument principal de $1 - z^4$. On obtient donc sa racine carrée en divisant cet argument par 2, ce qui montre que $\text{Arg}(\sqrt{1 - z^4}) = \theta - \frac{\pi}{4}$.

(ii) Si δ_θ désigne le chemin $t \in [0, \theta] \mapsto e^{it}$, alors

$$F(z) - F(1) = \int_{\delta_\theta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^\theta \frac{ie^{it}dt}{\sqrt{1-e^{4it}}} = \int_0^\theta \frac{ie^{it}dt}{\sqrt{2 \sin 2t} e^{i(t-\frac{\pi}{4})}} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{2 \sin 2t}}.$$

Noter que, puisque l'intégrand est positif et équivalent à $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ lorsque t tend vers 0 en restant positif, et puisque l'intégrale de Riemann $\int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, par comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 \sin 2t}}$ est intégrable sur $[0, \theta]$.

(iii) La mesure (modulo 2π) de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM_z})$ est $\arg \frac{F(z)-F(1)}{0-F(1)}$. Puisque $F(1) > 0$, cette mesure est aussi $\arg(-(F(z) - F(1)))$. Compte tenu de la question précédente, qui montre que l'argument principal de $F(z) - F(1)$ est $\frac{3\pi}{4}$, la mesure principale de cet angle est $\frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}$.



2.7) Les questions **2.3** et **2.5** montrent immédiatement que F se prolonge par continuité sur $\mathcal{U} \cup \{1, i, -1, -i\}$ par les formules $F(i^k) = i^k F(1) = i^k \beta$, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

La question **2.6(iii)** assure que l'image du quart de cercle $\{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ est contenue dans le segment $[\beta, i\beta]$ puisque l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BM_z}$ est constant, de mesure principale $-\frac{\pi}{4}$. En outre, puisque la fonction $\theta \mapsto \int_0^\theta \frac{4dt}{\sqrt{2 \sin 2t}}$ est strictement croissante et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la question **2.6** assure que F est un homéomorphisme du compact $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur le segment $[\beta, i\beta]$. Toujours en utilisant la propriété $F(iz) = iF(z)$ montrée en **2.6**, cela entraîne que F induit, par restriction, un homéomorphisme du cercle ∂D sur la réunion des quatre segments $[\beta, i\beta]$, $[i\beta, -\beta]$, $[-\beta, -i\beta]$ et $[-i\beta, \beta]$, qui constitue le bord de C_β .

2.8) D'abord, on paramètre, puis on change de variable : $\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz = \int_0^1 \frac{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}{F(\gamma(t)) - w} dt = \int_0^1 \frac{(F \circ \gamma(t))' dt}{F \circ \gamma(t) - w}.$

Ensuite, puisque F est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et continue sur $\mathcal{U} \cup \{0, i, -1, -i\}$ et puisque γ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $F \circ \gamma$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des quatre intervalles $]0, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ et $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. Ainsi, la fonction $F \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : c'est une chemin de $\mathbb{C}$. On peut alors écrire $\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz = \int_{F \circ \gamma} \frac{dz}{z - w}$. On reconnaît cette dernière intégrale curviligne, qui est $2i\pi \text{Ind}_{F \circ \gamma}(w)$.

2.9) • On montre d'abord que F est injective sur D .

Soit $z_0 \in D$. Alors, $F(z_0) \notin \partial C_\beta = \text{Supp}(F \circ \gamma)$, puisque F induit un homéomorphisme de ∂D sur ∂C_β . D'après la formule rappelée par l'énoncé, le nombre de solutions dans D de l'équation $F(z) = F(z_0)$ est $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - F(z_0)} dz$.

D'après la question précédente, ce nombre vaut $\text{Ind}_{F \circ \gamma}(F(z_0))$. Mais la question **2.7** assure que cet indice est 0 ou 1 (le lacet $F \circ \gamma$ parcourt son support — qui est le brave carré ∂C_β — une fois dans le sens direct), ce qui montre que z_0 est l'unique solution dans D de l'équation $F(z) = F(z_0)$: on a montré que f est injective sur D .

• On montre ensuite que $F(D)$ est égal à C_β .

Soit $w \in C_\beta$. Alors, à nouveau, le nombre de solutions de l'équation $F(z) = w$ est $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz = \text{Ind}_{F \circ \gamma}(w) = 1$, la dernière égalité venant du fait que $w \in C_\beta$. On a montré que $C_\beta \subseteq F(D)$. Enfin, F étant ouverte (elle est holomorphe) et continue, $F(D)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}_\beta$ qui contient $0 = F(0)$ et qui ne rencontre pas ∂C_β , puisque F envoie ∂D sur ∂C_β : l'ouvert $F(D)$ est contenu dans la composante connexe contenant 0 de $\mathbb{C}_\beta \setminus \partial C_\beta$, qui est C_β . On a montré que $F(D) = C_\beta$.

[NB = on peut aussi montrer que $F(D) \subseteq C_\beta$ par le calcul, en s'appuyant sur la formule de la question **2.3**.]

• Pour conclure : on a montré que F est une bijection holomorphe $D \rightarrow C_\beta$. C'est donc (automatiquement) un difféomorphisme analytique entre D et C_β .

Examen

– durée : deux heures –

— Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve —

1 Une intégrale [7 points]

L'objet de cette partie consiste à calculer l'intégrale

$$J_n(a) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$$

lorsque a est un nombre complexe non nul de module différent de 1 et n un entier naturel.

1.1) Si t est un nombre réel, factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^2 - 2X \cos t + 1$.

1.2) Soient a un nombre complexe non nul de module différent de 1 et n un entier naturel. Calculer les résidus en les pôles de la fonction méromorphe

$$z \mapsto \frac{z^n}{(z - a) \left(z - \frac{1}{a}\right)}.$$

1.3) Soient a un nombre complexe non nul de module strictement inférieur à 1 et n un entier naturel. En appliquant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{z^n}{(z - a) \left(z - \frac{1}{a}\right)} dz,$$

où C désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

1.4) En paramétrant convenablement le lacet C , déduire de la question précédente que si $0 < |a| < 1$,

$$J_n(a) = \frac{\pi a^n}{1 - a^2}.$$

1.5) On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et que $a \in \mathbb{C}$ a un module strictement supérieur à 1. Calculer $J_n(a)$.

1.6) (Bonus) Que se passe-t-il pour $J_n(a)$ lorsque le module de a égale 1 ?

2 Les fonctions unitaires sont les produits de Blaschke [13 points]

Dans toute cette partie, on note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, $\overline{D}$ son adhérence topologique dans $\mathbb{C}$ et ∂D le cercle unité, qui est la frontière de D .

2.1 Homographies de Blaschke

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on note h_a la fonction méromorphe

$$h_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

2.1) Montrer que si $a \neq 0$, la décomposition de la fraction rationnelle h_a s'écrit

$$h_a(z) = \frac{1}{\overline{a}} \left(-1 + \frac{1 - |a|^2}{1 - \overline{a}z} \right).$$

En déduire les pôles de h_a et calculer leurs modules.

2.2) Montrer que pour tout $a \in D$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = 1 \implies |h_a(z)| = 1.$$

2.3) Est-il vrai que $h_a(\partial D) = \partial D$, pour tout $a \in D$?

2.2 Fonctions unitaires

Une appelle fonction *unitaire* toute fonction f continue sur $\overline{D}$, holomorphe sur D et qui vérifie $f(\partial D) \subseteq \partial D$. La section qui précède montre que les homographies h_a sont des fonctions unitaires lorsque $a \in D$.

2.4) Montrer que toute fonction unitaire f vérifie $f(\overline{D}) \subseteq \overline{D}$.

2.5) Montrer que toute fonction unitaire et non constante a au moins un zéro dans D .

[Dans le cas où une fonction unitaire f ne s'annule pas, on pourra raisonner sur $1/f$.]

2.6) On suppose que f est une fonction unitaire qui admet un unique zéro dans D , que l'on note a . On note m la multiplicité de a en tant que zéro de f . Montrer qu'il existe un nombre complexe u , de module 1, tel que

$$\forall z \in \overline{D}, f(z) = u \left(\frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right)^m.$$

2.7) Montrer que l'ensemble des zéros dans D d'une fonction unitaire est fini.

2.8) En s'inspirant par exemple de la question **2.6)**, montrer que les fonctions unitaires non constantes sont exactement les produits de la forme

$$u \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z} \right)^{m_k}$$

où $n, m_1, \dots, m_n$ sont des entiers naturels non nuls, $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments distincts de D et $u \in \partial D$.

Examen : un corrigé succinct

1 Une intégrale

1.1) $X^2 - 2X \cos t + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it})$.

1.2) On note $f_{a,n}(z) = \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$. Ses deux seuls pôles sont a et $1/a$ — noter que $a \neq \frac{1}{a}$ puisque $|a| \neq 1$. Le calcul est immédiat : $\text{Res}_a(f_{a,n}) = \frac{a^n}{a-\frac{1}{a}} = \frac{a^{n+1}}{a^2-1}$ et $\text{Res}_{\frac{1}{a}}(f_{a,n}) = \frac{(\frac{1}{a})^n}{\frac{1}{a}-a} = \frac{1}{a^{n-1}(1-a^2)}$.

1.3) L'indice de C par rapport à $\frac{1}{a}$ est nul puisque a est dans le disque unité ouvert. Ensuite, l'indice de C par rapport à a est 1, conséquence de la définition de C . Ainsi, selon la formule des résidus,

$$\int_C \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz = 2i\pi \text{Res}_a(f_{a,n}) = 2i\pi \frac{a^{n+1}}{a^2-1}.$$

1.4) On paramètre le lacet C par $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. L'intégrale curviligne précédente s'écrit alors

$$\int_C \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{(e^{it}-a)(e^{it}-\frac{1}{a})} ie^{it} dt = -ai \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1-2a \cos t + a^2} dt.$$

Mais pour des raisons de parité et de 2π -périodicité, $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{1-2a \cos t + a^2} dt = 0$ et ainsi

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1-2a \cos t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a \cos t + a^2} dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a \cos t + a^2} dt.$$

En rassemblant ces résultats, on obtient

$$J_n(a) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{ia} \times 2i\pi \frac{a^{n+1}}{a^2-1} = \frac{\pi a^n}{1-a^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

1.5) On peut reprendre le calcul précédent en remarquant que l'intégrale curviligne $\int_C \frac{z^n}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz$ est symétrique en a et $1/a$. On peut aussi mettre a en facteur dans l'intégrale ordinaire, ce qui fournit

$$J_n(a) = \frac{1}{a^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - \frac{2}{a} \cos t + \frac{1}{a^2}} dt$$

et appliquer la formule fraîchement démontrée à $1/a$ puisque son module est strictement inférieur à 1. Il vient alors

$$J_n(a) = \frac{1}{a^2} \times \frac{\pi}{a^n (1 - \frac{1}{a^2})} = \frac{\pi}{a^n (a^2 - 1)}.$$

1.6) L'intégrand de $J_n(a)$ est $\frac{\cos(nt)}{(a - e^{it})(a - e^{-it})}$. Lorsque $|a| = 1$, il existe $t \in [0, \pi[$ tel que $a = e^{it}$ ou $a = e^{-it}$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(nt)}{(a - e^{it})(a - e^{-it})}$ n'est ainsi (évidemment) pas intégrable sur $[0, \pi]$.

2 Les fonctions unitaires sont les produits de Blaschke

2.1 Homographies de Blaschke

2.1) Pour la décomposition, il suffit de faire le calcul puisque la forme fournie par l'énoncé est une somme de deux éléments simples. Si $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$, l'unique pôle de h_a est $\frac{1}{\bar{a}}$, dont le module est $\frac{1}{|a|}$. Par ailleurs, h_0 est entière puisque $h_0(z) = z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Enfin, si $|a| = 1$, h_a est constante et n'a donc pas de pôle non plus.

2.2) Si $0 < |a| < 1$, la fonction h_a est holomorphe sur le disque de centre 0 et de rayon $1/|a|$; elle est donc définie sur le cercle unité. En outre, si $|z| = 1$, alors

$$|h_a(z)| = \left| \frac{z - a}{z\bar{z} - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{z - a}{z(\bar{z} - \bar{a})} \right| = \frac{1}{|z|} = 1.$$

Par ailleurs, le cas $a = 0$ est immédiat puisque $|h_0(z)| = |z|$ pour tout nombre complexe z .

2.3) Si $a = 0$, c'est évident. On suppose que $a \neq 0$. L'équation $h_a(z) = w$ se résout en $z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w}$. Autrement dit, lorsque $a \in D$, les fonctions h_a et h_{-a} sont des bijections réciproques l'une de l'autre du disque ouvert de centre 0 et de rayon $1/|a|$ sur lui-même. Ainsi, en prenant l'image par h_a dans l'inclusion $h_{-a}(\partial D) \subseteq \partial D$, on obtient que $\partial D \subseteq h_a(\partial D)$. Comme en outre $h_a(\partial D) \subseteq \partial D$, cela montre que h_a établit une bijection (de classe $\mathcal{C}^\infty$) du cercle sur lui-même : la réponse est oui.

2.2 Fonctions unitaires

2.4) Si f est unitaire, elle est de module constant égal à 1 sur le cercle. Le principe du module maximum entraîne que $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in D$, ce qu'il fallait démontrer.

2.5) On suppose qu'une fonction unitaire f ne s'annule pas dans D . Alors, la fonction $1/f$ est aussi unitaire. La question précédente assure alors que $|f(z)| \leq 1$ et $|f(z)| \geq 1$, pour tout $z \in \bar{D}$. Or, une fonction holomorphe de module constant est localement constante — c'est une conséquence des équations de Cauchy-Riemann, par exemple. Donc, puisque D est connexe, f est constante sur D . Comme en outre f est continue sur $\bar{D}$, elle est constante sur $\bar{D}$, ce qu'il fallait démontrer.

2.6) Sous les hypothèses de l'énoncé, soit g la fonction $g = f/h_a^m$, évidemment holomorphe sur $D \setminus \{a\}$, continue sur $\bar{D}$ et de module 1 en tout point du cercle unité. Le développement en série de Laurent de g en a montre que g se prolonge par continuité en a — via la formule $g(a) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) (1 - |a|^2)^m$. Puisque m est l'ordre de f en a , le nombre $g(a)$ ainsi défini est non nul et la fonction g ne s'annule donc pas sur D . Comme elle est par ailleurs (évidemment) unitaire, on en déduit, grâce à la question précédente, qu'elle est constante : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $g(z) = u$, pour tout $z \in \bar{D}$. Comme $|g(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$, nécessairement, $|u| = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

2.7) Par l'absurde, on suppose que l'ensemble des zéros d'une fonction unitaire f est infini. On en extrait une partie dénombrable, qui s'indexe en une suite infinie de zéros de f dans le compact $\bar{D}$. On en extrait une suite infinie et convergente dans $\bar{D}$. Mais puisque la valeur de f est de module 1 sur le cercle unité, la limite de cette suite est nécessairement dans D . Les zéros de la fonction f , holomorphe sur D , ont cette limite pour point d'accumulation dans D , ce qui entraîne — par prolongement analytique — que f est nulle sur D , puisque D est connexe. Donc f est nulle sur $\bar{D}$, ce qui contredit le fait que f soit unitaire. L'hypothèse que l'ensemble des zéros de f soit infini ne tient pas, ce qu'il fallait démontrer.

NB : on peut raisonner autrement, mais on ne coupe pas à un argument de compacité. Par exemple, on peut arguer que f est uniformément continue sur le compact ∂D , ce qui montre que f ne s'annule pas hors d'un disque fermé de rayon $r < 1$. En particulier, les zéros de f sont dans ce disque compact ; s'il y en a une infinité, ils s'accumulent, en contradiction avec le principe des zéros isolés.

2.8) Soit f une fonction unitaire. On note $a_1, \dots, a_n$ les zéros (distincts) de f — il y en a un nombre fini non nul, on le sait grâce aux questions précédentes — et $m_1, \dots, m_n$ leurs multiplicités respectives. On note alors, pour tout $z \in \bar{D}$,

$$P(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \right)^{m_k}.$$

En raisonnant comme dans le cas d'un zéro unique, la fonction f/P se prolonge par continuité sur $\overline{D}$ et définit ainsi une fonction unitaire qui ne s'annule pas. Elle est donc constante, comme le garantit la question **2.5**). Le module de cette constante est nécessairement 1 puisque $f(z)$ et $P(z)$ ont pour module 1 lorsque z est sur le cercle unité, ce qui finit de démontrer le résultat.

Examen partiel

– durée : une heure et demie –

— *L'homotopie de deux chemins ou la connexité d'un ouvert, si on doit s'en servir, pourront être affirmées sans justification, à condition qu'elles soient vraies et illustrées par un dessin.* —

1 Curvilignes (7 points)

1.1) Quel est le plus grand disque ouvert centré en 0 sur lequel la fonction f , définie par la formule

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5n+1}}{(5n+1)\pi^{5n+5}},$$

est holomorphe ? Montrer que $f'(z)$ est une fraction rationnelle en z , pour tout z dans ce disque.

1.2) Soit $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par

$$\forall t \in [0, 1], C(t) = 1 + 2e^{2i\pi t}.$$

Dessiner le support de C et montrer que

$$\oint_C \frac{dz}{\pi^5 - z^5} = 0.$$

1.3) Soit T un lacet dont le support est le triangle de sommets -1 , $-1 - 5i$ et 0 , parcouru une fois dans le sens direct. Dessiner le support de T et le support de C sur un même dessin, puis calculer

$$\oint_T \left(\frac{1}{\pi^5 - z^5} - \frac{2}{(z+i)^5} \right) dz.$$

2 Majoration standard (5 points)

Pour tout $R > 0$, on note Γ_R la réunion des trois segments

$$\Gamma_R = [R, R + iR] \cup [R + iR, -R + iR] \cup [-R + iR, -R].$$

2.1) Dessiner Γ_R et donner trois chemins injectifs du plan complexe dont la concaténation a pour support γ_R .

2.2) Montrer, en utilisant la seconde inégalité triangulaire et une majoration standard, que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{dz}{z^7 + 3} = 0.$$

3 Liouville adapté (5 points)

Si z est un nombre complexe, on note $\Im(z)$ sa partie imaginaire. On note aussi $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré et D le disque unité ouvert :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}.$$

3.1) Montrer que la formule

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

définit une application holomorphe et bijective $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow D$ dont la réciproque est également holomorphe.

3.2) En utilisant le théorème de Liouville et la question précédente, montrer que toute application holomorphe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ est nécessairement constante.

4 PPM et PPA combinés (3 points)

— On note D le disque unité ouvert du plan complexe, $\overline{D}$ son adhérence, à savoir le disque unité fermé, et ∂D son bord, à savoir le cercle unité —

Soient $U = \mathbb{C} \setminus \{2, 2i, -2, -2i\}$ et f une fonction holomorphe sur U . On suppose que

$$f(\partial D) \subseteq \overline{D} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = i.$$

En combinant le principe du module maximum et le principe du prolongement analytique, montrer que

$$\forall z \in U, f(z) = i.$$

Examen partiel : un corrigé succinct

1 Curvilignes

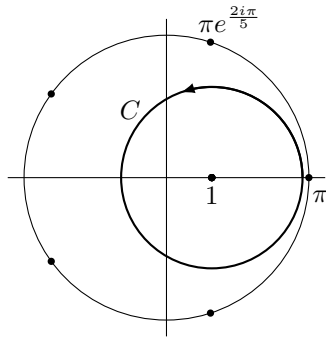
1.1) Quel est le plus grand disque ouvert centré en 0 sur lequel la fonction f , définie par la formule $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5n+1}}{(5n+1)\pi^{5n+5}}$, est holomorphe ? Montrer que $f'(z)$ est une fraction rationnelle en z , pour tout z dans ce disque.

Le rayon de cette série entière est π ; le disque cherché est donc le disque de rayon π . Dans le disque ouvert, on dérive terme à terme. On trouve, pour tout z dans le disque ouvert,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{5n}}{\pi^{5n+5}} = \frac{1}{\pi^5 - z^5}.$$

C'est une fraction rationnelle.

1.2) Soit $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\forall t \in [0, 1], C(t) = 1 + 2e^{2i\pi t}$. Dessiner le support de C et montrer que $\oint_C \frac{dz}{\pi^5 - z^5} = 0$.



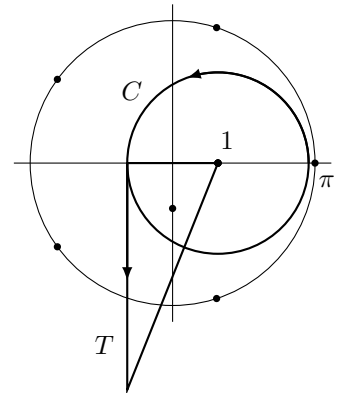
La fraction rationnelle $R(z) = \frac{1}{\pi^5 - z^5}$ a pour pôles les $\pi e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k \in \{0, \dots, 4\}$. Aucun de ces pôles n'est sur le support de C , l'intégrale curviligne est bien définie. Comme le support de C est contenu dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon π sur lequel R admet f pour primitive, et puisque C est un lacet, l'intégrale de R sur ce lacet est nulle. On peut aussi utiliser le théorème de Cauchy en argumentant que R est holomorphe dans le disque de centre 0 et de rayon π et que C est homotope à zéro dans ce disque, ce qui entraîne la nullité de l'intégrale.

1.3) Soit T un lacet dont le support est le triangle de sommets -1 , $-1 - 5i$ et 1 , parcouru une fois dans le sens direct. Dessiner le support de T et le support de C sur un même dessin, puis calculer $\oint_T \left(\frac{1}{\pi^5 - z^5} - \frac{2}{(z+i)^5} \right) dz$.

Le support de T ne contient ni $-i$, pôle de la fraction $\frac{2}{(z+i)^5}$, ni les pôles de R : l'intégrale curviligne est bien définie. D'une part, les lacets C et T , tous les deux passant par -1 , sont, quitte à modifier leurs origines, homotopes dans l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \left\{ \pi e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{0, \dots, 4\} \right\}$ et la fonction R est holomorphe dans cet ouvert. Ainsi, grâce au théorème de Cauchy,

$$\oint_T \frac{dz}{\pi^5 - z^5} = \oint_C \frac{dz}{\pi^5 - z^5} = 0.$$

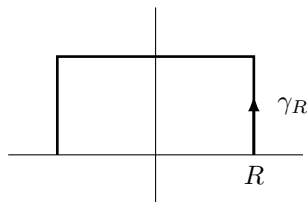
Pour montrer la nullité de cette intégrale, on peut aussi évoquer directement le fait que T est homotope à zéro dans l'ouvert U sur lequel R est holomorphe. Par ailleurs, la fonction $z \mapsto \frac{1}{(z+i)^5}$ admet $z \mapsto \frac{-1}{4(z+i)^4}$ pour primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, ce qui implique que l'intégrale de cette fonction sur le lacet T est également nulle.



2 Majoration standard

Pour tout $R > 0$, on note Γ_R la réunion des trois segments $\Gamma_R = [R, R + iR] \cup [R + iR, -R + iR] \cup [-R + iR, -R]$.

2.1) Dessiner Γ_R et donner trois chemins injectifs du plan complexe dont la concaténation a pour support γ_R .



On donne un paramétrage standard de chacun des trois segments parcourus une fois dans le sens indiqué par la flèche du dessin. Le chemin γ_R en est la concaténation.

Segment $[R, R + iR] : t \mapsto R + itR$

Segment $[R + iR, -R + iR] : t \mapsto R + iR - 2tR$

Segment $[-R + iR, -R] : t \mapsto -R + iR - itR$

2.2) Montrer, en utilisant la seconde inégalité triangulaire et une majoration standard, que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{dz}{z^7 + 3} = 0$.

Pour tout z dans Γ_R , le dessin montre immédiatement que $|z| \geq R$ — ce que l'on montre aisément par le calcul, par ailleurs. Ainsi, dès que $R > \sqrt[7]{3}$ et que $z \in \Gamma_R$, on a la majoration

$$\left| \frac{1}{z^7 + 3} \right| \leq \frac{1}{R^7 - 3}.$$

Par majoration standard, puisque la longueur de γ_R est $4R$, on obtient

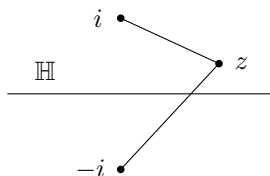
$$\left| \oint_{\gamma_R} \frac{dz}{z^7 + 3} \right| \leq \frac{4R}{R^7 - 3} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

3 Liouville adapté

Si z est un nombre complexe, on note $\Im(z)$ sa partie imaginaire. On note aussi $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré et D le disque unité ouvert : $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

3.1) Montrer que la formule $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ définit une application biholomorphe $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow D$.

φ est une fraction rationnelle : elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\} \supseteq \mathbb{H}$, donc sur $\mathbb{H}$. En outre, c'est une homographie dont la réciproque est l'homographie $\psi : z \mapsto -i \frac{z+1}{z-1}$ comme le montre un calcul immédiat.



Si $z \in \mathbb{H}$, alors, puisque l'axe réel est la médiatrice de $\{\pm i\}$, la distance de z à i est strictement inférieure à la distance de z à $-i$, ce qui se traduit par $|\varphi(z)| < 1$, ou encore par $\varphi(z) \in D$. On peut aussi voir cela par le calcul, en écrivant par exemple que

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{|z|^2 + 1 - 2\Im(z)}{|z|^2 + 1 + 2\Im(z)},$$

ce nombre étant strictement inférieur à 1 dès que $\Im(z) > 0$.

On a montré que $\varphi(\mathbb{H}) \subseteq D$. Pour obtenir l'égalité, il reste à montrer par exemple que $\psi(D) \subseteq \mathbb{H}$. Le calcul

$$\Im(\psi(z)) = \Im\left(-i \frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|z-1|^2}$$

le montre immédiatement.

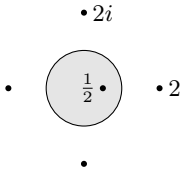
3.2) En utilisant le théorème de Liouville et la question précédente, montrer que toute application holomorphe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ est nécessairement constante.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ une application holomorphe. Alors, $\varphi \circ f$ est une application entière dont l'image est dans D . Donc elle est bornée. Le théorème de Liouville assure alors que $\varphi \circ f$ est constante. Puisque φ est bijective, cela entraîne que f est constante.

4 PPM et PPA combinés

On note D le disque unité ouvert du plan complexe, $\overline{D}$ son adhérence, à savoir le disque unité fermé, et ∂D son bord, à savoir le cercle unité. Soient $U = \mathbb{C} \setminus \{2, 2i, -2, -2i\}$ et f une fonction holomorphe sur U . On suppose que $f(\partial D) \subseteq \overline{D}$ et $f(\frac{1}{2}) = i$. En combinant le principe du module maximum et le principe du prolongement analytique, montrer que $\forall z \in U, f(z) = i$.

L'hypothèse $f(\partial D) \subseteq \overline{D}$ dit que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z sur ∂D . Or, $\frac{1}{2} \in D$ et $|f(\frac{1}{2})| = 1$. Puisque f est holomorphe sur D , le principe du module maximum assure que f est constante, égale à $f(\frac{1}{2}) = i$ sur le connexe D . Par prolongement analytique, puisque U est un connexe qui contient D , l'application f est constante — égale à i — sur U tout entier.



Contrôle continu : épreuve de remplacement

(durée : une heure et demie)

1 Petites questions (8 points)

— On prendra garde, ici plus encore que dans les autres parties, de détailler soigneusement l'argumentation —

1.1) Peut-on trouver un ouvert U de $\mathbb{C}$, non simplement connexe, et une fonction f holomorphe sur U , non constante, qui admette une primitive sur U ?

1.2) Soit $V = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, |z| \geq 1\}$. Dessiner V . Combien existe-t-il de fonctions f , holomorphes sur V , qui vérifient

$$\forall z \in V, f(z)^5 = (z^2 - 2) \cos z ?$$

1.3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note

$$H(z) = -\frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n^n}.$$

(i) La fonction H est-elle bornée ?

(ii) La fonction

$$g : z \mapsto H(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$$

admet-elle en 0 un faux point singulier, un pôle, ou un point singulier essentiel ?

2 Arctangente (4 points)

Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{ix, x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}.$$

2.1) Dessiner $\mathcal{U}$.

2.2) La fonction *arctangente*, c'est bien connu, est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$, qui vérifie

$$\begin{cases} \textcircled{1} \forall z \in \mathcal{U}, \frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2} \\ \textcircled{2} \arctan(0) = 0 \end{cases}$$

Donner un argument qui montre que arctangente est l'*unique* fonction analytique sur $\mathcal{U}$ qui vérifie les deux conditions $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$.

2.3) Quel est l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\arctan z$ et $\arctan \frac{1}{z}$ sont simultanément définis ?

2.4) Donner un ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel l'application $z \mapsto \arctan z + \arctan \frac{1}{z}$ est constante, et donner la valeur de cette constante.

3 Cylindrique de Bessel (8 points)

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on note

$$B(z, w) = \exp\left(\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right).$$

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $J_n(z)$ le n^{e} coefficient du développement en série de Laurent à l'origine de $w \mapsto B(z, w)$, si bien que

$$e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) w^n. \quad (1)$$

3.1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Sur quelle couronne ouverte maximale le développement en série de Laurent (1) est-il valide ?

3.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,1)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} dw \quad (2)$$

où $C(0, 1)$ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

3.3) Montrer que pour tous $w, z \in \mathbb{C}$,

$$|w| = 1 \implies \left| \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} \right| = e^{-\Im(w)\Im(z)}$$

où $\Im$ désigne la partie imaginaire.

3.4) En déduire que J_n est une fonction entière, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3.5) Soit $n \in \mathbb{Z}$. En appliquant la formule des résidus à l'intégrale (2), montrer que $J_n(z)$ est le coefficient de w^{-1} dans la série de Laurent (en w)

$$\sum_{\substack{m, k \geq 0 \\ k \leq m}} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^m w^{m-2k-n-1}$$

et en déduire que le développement en série entière de J_n à l'origine est

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

[Dans cette question dans laquelle les formules visées sont donnés, on apportera un soin particulier aux calculs dans leur minutie, dans leur concision et dans leur exactitude[♠].]

[♠]Bref, calculez sans erreur, court et sans bluff !

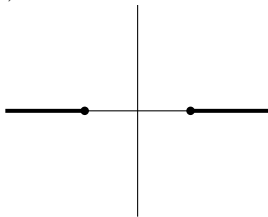
Epreuve de remplacement : un corrigé succinct

1 Petites questions

1.1) Peut-on trouver un ouvert U de $\mathbb{C}$, non simplement connexe, et une fonction f holomorphe sur U , non constante, qui admette une primitive sur U ?

Oui, il suffit de prendre $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f(z) = z$ qui est la dérivée de $z \mapsto \frac{1}{2}z^2$.

1.2) Soit $V = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, |z| \geq 1\}$. Dessiner V . Combien existe-t-il de fonctions f , holomorphes sur V , qui vérifient $\forall z \in V, f(z)^5 = (z^2 - 2) \cos z$?



La fonction $g : z \mapsto (z^2 - 2) \cos z$ a pour zéros $\pm\sqrt{2}$ et les zéros de cosinus qui sont tous réels et ont une valeur absolue strictement supérieure à 1. Donc f ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est simplement connexe, f admet donc une racine cinquième $f_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, c'est-à-dire une solution de l'équation $f_1^5 = g$. Comme $\mathcal{U}$ est connexe, elle en admet exactement cinq qui sont les fonctions ωf_1 où ω est une racine cinquième de l'unité.

1.3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $H(z) = -\frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n^n}$. (i) La fonction H est-elle bornée ? (ii) La fonction $g : z \mapsto H(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$ admet-elle en 0 un faux point singulier, un pôle, ou un point singulier essentiel ?

(i) Le rayon de la série entière qui définit H est (évidemment) infini. Ainsi, H est une fonction entière. Si elle était bornée, le théorème de Liouville lui imposerait d'être constante. Or,

$$H(0) = 0 \quad \text{et} \quad H(1) = -\frac{1}{2} + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \geq \frac{1}{2} > 0,$$

ce qui montre que f n'est pas constante.

[Noter que le fait que le développement en série entière de H en 0 ne soit pas constant montre directement que f n'est pas constante, par unicité du DSE.]

(ii) Puisque H est entière, g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Son développement en série de Laurent à l'origine est

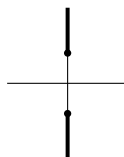
$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^n z^{2n}} - \frac{1}{2z} - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n^n}.$$

La série des termes à puissances négatives de z n'est pas presque nulle ; donc 0 est un point singulier essentiel de g .

2 Arctangente

Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{ix, x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$.

2.1) Dessiner $\mathcal{U}$.



2.2) La fonction *arctangente*, c'est bien connu, est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$, qui vérifie ① $\forall z \in \mathcal{U}, \frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}$ et ② $\arctan(0) = 0$. Donner un argument qui montre que *arctangente* est l'*unique* fonction analytique sur $\mathcal{U}$ qui vérifie les deux conditions ① et ②. Si F est une fonction vérifiant ① sur $\mathcal{U}$, alors la fonction $F - \arctan$ a une dérivée nulle sur $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est connexe, cela entraîne que $F - \arctan$ est constante. La condition ② impose alors que cette constante soit nulle.

2.3) Quel est l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\arctan z$ et $\arctan \frac{1}{z}$ sont simultanément définis ?

Pour définir $\frac{1}{z}$, il faut et il suffit que $z \neq 0$. L'image de $\{ix, x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$ par $z \mapsto \frac{1}{z}$ est $[-i, i] \setminus \{0\}$. Ainsi, $\arctan z$ et $\arctan \frac{1}{z}$ sont simultanément définis si, et seulement si $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

2.4) Donner un ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel l'application $z \mapsto \arctan z + \arctan \frac{1}{z}$ est constante, et donner la valeur de cette constante.

On dérive : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dz} \left(\arctan z + \arctan \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2} = 0.$$

Ainsi, l'application $h : z \mapsto \arctan z + \arctan \frac{1}{z}$ est constante sur tout connexe où elle est définie. Par exemple, elle est constante égale à $h(1) = \frac{\pi}{2}$ sur $\{z, \Re(z) > 0\}$; elle est également constante égale à $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$ sur $\{z, \Re(z) < 0\}$.

3 Cylindrique de Bessel

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on note $B(z, w) = \exp\left(\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right)$. Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $J_n(z)$ le n^{e} coefficient du développement en série de Laurent à l'origine de $w \mapsto B(z, w)$, si bien que

$$e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) w^n. \quad (1)$$

3.1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Sur quelle couronne ouverte maximale le développement en série de Laurent (1) est-il valide ?

Selon le théorème de développement en série de Laurent des fonctions holomorphes sur une couronne, puisque $w \mapsto B(z, w)$ est holomorphe sur la couronne $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, le développement en série de Laurent (1) est valide sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,1)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} dw \quad (2)$$

où $C(0,1)$ désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

C'est la formule de Cauchy — sous la forme de l'expression intégrale des coefficients du développement en série de Laurent de $w \mapsto B(z, w)$.

3.3) Montrer que pour tous $w, z \in \mathbb{C}$, $|w| = 1 \implies \left| \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} \right| = e^{-\Im(w)\Im(z)}$ où $\Im$ désigne la partie imaginaire.

Soient $z, w \in \mathbb{C}$ avec $|w| = 1$. Alors, successivement,

$$\left| \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} \right| = \left| e^{\frac{z}{2}(w - \bar{w})} \right| = \left| e^{iz\Im(w)} \right| = e^{\Im(w)\Re(iz)} = e^{-\Im(w)\Im(z)}.$$

3.4) En déduire que J_n est une fonction entière, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soient $R > 0$ et z dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R , que l'on note $\overline{D}(0, R)$. Alors, $|\Im(z)| \leq R$. Ainsi, pour tout $z \in \overline{D}(0, R)$ et pour tout w dans le cercle unité, puisque $|\Im(w)| \leq 1$, on a

$$\left| \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}} \right| \leq e^R.$$

C'est une inégalité de domination pour l'intégrale (curviligne, après paramétrisation) (2). Ainsi, puisque $z \mapsto \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}$ est holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$ (notation évidente), la fonction J est holomorphe sur $D(0, R)$. Comme cela est vrai pour tout $R > 0$, on en déduit que J_n est entière.

3.5) Soit $n \in \mathbb{Z}$. En appliquant la formule des résidus à l'intégrale (2), montrer que $J_n(z)$ est le coefficient de w^{-1} dans la série de Laurent (en w) $\sum_{\substack{m, k \geq 0 \\ k \leq m}} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^m w^{m-2k-n-1}$ et en déduire que le développement en série entière de J_n à l'origine est $J_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le seul point singulier de $w \mapsto \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}$ est l'origine. Puisque l'indice de l'origine $C(0, 1)$ est 1, le théorème des résidus assure que l'intégrale (2), savoir $J_n(z)$, est le résidu en 0 de la fonction $w \mapsto \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}$. Pour le calculer, il suffit de trouver le coefficient de w^{-1} dans le développement en série de Laurent de $w \mapsto \frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}}$. On y va : ce développement, valide pour tout $w \neq 0$, est

$$\frac{e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}} = \frac{1}{w^{n+1}} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m \left(w - \frac{1}{w}\right)^m = \frac{1}{w^{n+1}} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} w^{m-2k}\right).$$

Puisque la convergence de cette série de fonctions de w est absolue — elle est normale sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ —, on peut regrouper et réordonner les termes sans vergogne. Puisque $\frac{1}{m!} \binom{m}{k} = \frac{1}{k!(m-k)!}$, on obtient la formule demandée : le résidu cherché est le coefficient de w^{-1} dans la série de Laurent

$$\sum_{\substack{m, k \geq 0 \\ k \leq m}} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^m w^{m-2k-n-1} \quad (3)$$

Pour calculer $J_n(z)$, il suffit d'extraire le coefficient de w^{-1} dans (3). Ce coefficient est

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ m-2k-n-1=-1}} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^m w^{m-2k-n-1} = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ m=n+2k}} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

ce qui est la formule cherchée, valide pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Examen

– durée : deux heures –

— *L’homotopie de deux chemins, la connexité ou la simple connexité d’un ouvert, si on doit s’en servir, pourront être affirmées sans justification, à condition qu’elles soient vraies et illustrées par un dessin.* —

1 Un point singulier (2 points)

La fonction $z \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{z^2}\right)$ a-t-elle un pôle en 0 ?

2 Un calcul d’intégrale par la méthode des résidus (8 points)

Soit $x \in]0, 1[$.

2.1) Quelle est la partie du plan complexe formée des points en lesquels la fonction $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$ n’est pas holomorphe ?

2.2) Calculer le résidu en $i\pi$ de la fonction $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$.

2.3) Pour tout $R > 0$, on note S_R “le” chemin du plan complexe consistant à parcourir une fois le segment $[2i\pi + R, 2i\pi - R]$. Donner une paramétrisation de S_R et montrer que

$$\oint_{S_R} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz = -e^{2i\pi x} \int_{-R}^R \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt.$$

2.4) Pour tout $R > 0$, on note γ_R “le” chemin du plan complexe consistant à parcourir une fois le rectangle de sommets $(R, R+2i\pi, -R+2i\pi, -R)$ dans le sens direct. Utiliser la formule des résidus en intégrant $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$ le long de γ_R pour démontrer la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1)$$

— on prendra soin de bien argumenter *toutes* les étapes du raisonnement, notamment l’étude de l’intégrale curviligne le long de chacun des quatre côtés du rectangle.

2.5) (Question hors barème, points de bonus)

La formule (1) est-elle encore vraie lorsque x est un nombre complexe dont la partie réelle est dans l’intervalle $]0, 1[$? Pourquoi limiter la question à cette bande ouverte ?

3 Formule des compléments (10 points)

Introduction

La fonction Gamma d'Euler, notée Γ , est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ qui est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des entiers strictement négatifs. Elle vérifie les trois propriétés suivantes :

$$(\mathbf{FI}) \quad \forall z \in \mathbb{C}, (\Re(z) > 0) \implies \left(\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right)$$

$$(\mathbf{EF}) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$(\mathbf{VP}) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

L'objet de cette partie est de démontrer la *formule des compléments* d'Euler :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

3.1) Donner un argumentaire qui justifie qu'il ne peut pas y avoir deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ distinctes qui vérifient simultanément **(FI)**, **(EF)** et **(VP)**.

3.2) Montrer que la fonction

$$f : z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, f(z+1) = -f(z).$$

En déduire que f est 2-périodique.

3.3) En utilisant l'équation fonctionnelle **(EF)**, montrer que la fonction $z \mapsto \Gamma(z) - \frac{1}{z}$ se prolonge en 0 en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < 1\}$.

3.4) En déduire soigneusement que la fonction

$$d : z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

est entière.

3.5) On note $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| \leq 1\}$. Montrer que d est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \leq 1\}$. En déduire que d est bornée sur $\mathcal{B}$.

3.6) On note $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| \geq 1\}$ et g l'application

$$g : z \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

(i) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|\sin z|^2 = \sin^2 \Re(z) + \sinh^2 \Im(z)$$

où $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z .

(ii) En déduire que g est bornée sur $\mathcal{A}$.

3.7) En utilisant l'équation fonctionnelle **(EF)**, montrer que Γ est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(z) \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \geq 1\}$. En déduire que f est bornée sur $\mathcal{A}$.

3.8) Déduire des trois questions précédentes que $d = f - g$ est bornée sur $\mathbb{C}$.

3.9) Réunir les arguments des questions précédentes pour démontrer soigneusement la formule des compléments.

Examen : un corrigé succinct

1 Un point singulier

La fonction $z \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{z^2}\right)$ a-t-elle un pôle en 0 ?

Le développement en série de Laurent sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de cette fonction est

$$\cos\left(\frac{\pi}{z^2}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{1}{z^{4n}}\right).$$

L'infinité de termes non nuls du côté des puissances négatives de z montre que 0 est un point singulier essentiel de la fonction. La réponse est donc non.

2 Un calcul d'intégrale par la méthode des résidus

Soit $x \in]0, 1[$.

2.1) Quelle est la partie du plan complexe formée des points en lesquels la fonction $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$ n'est pas holomorphe ?

La fonction est (évidemment) holomorphe partout où elle est définie, c'est-à-dire sur le complémentaire des solutions de l'équation $e^z + 1 = 0$. La partie cherchée est le fermé $i\pi + 2i\pi\mathbb{Z}$.

2.2) Calculer le résidu en $i\pi$ de la fonction $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$.

Le nombre $i\pi$ est pôle simple de la fonction, qui s'écrit comme un quotient $\frac{f}{g}$ où f et g sont holomorphes au voisinage de $i\pi$, et où $i\pi$ est zéro simple de g . Un tel résidu se calcule *via* la formule $\frac{f(i\pi)}{g'(i\pi)}$. Dans le cas présent, le résidu cherché est $-e^{ix}$.

2.3) Pour tout $R > 0$, on note S_R "le" chemin du plan complexe consistant à parcourir une fois le segment $[2i\pi + R, 2i\pi - R]$. Donner une paramétrisation de S_R et montrer que $\oint_{S_R} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz = -e^{2i\pi x} \int_{-R}^R \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt$.

Une paramétrisation possible : $S_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2i\pi - t$. Alors,

$$\oint_{S_R} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{2i\pi x - xt}}{1+e^{2i\pi - t}} dt = -e^{2i\pi x} \int_{-R}^R \frac{e^{-xt}}{1+e^{-t}} dt$$

et on tombe sur le résultat cherché en changeant de variable sous l'intégrale ($t \rightsquigarrow -t$).

2.4) Pour tout $R > 0$, on note γ_R "le" chemin du plan complexe consistant à parcourir une fois le rectangle de sommets $(R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi, -R)$ dans le sens direct. Utiliser la formule des résidus en intégrant $z \mapsto \frac{e^{xz}}{1+e^z}$ le long de γ_R pour démontrer la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (1)$$

— on prendra soin de bien argumenter *toutes* les étapes du raisonnement, notamment l'étude de l'intégrale curviligne le long de chacun des quatre côtés du rectangle.

Pour tout $R > 0$, on écrit l'intégrale $\oint_{\gamma_R} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz$ de deux façons : l'une avec la formule des résidus, l'autre en décomposant le lacet en les quatre segments dont il est le concaténé.

L'unique pôle de l'intégrand par rapport auquel l'indice de γ_R n'est pas nul est $i\pi$. Le calcul plus haut montre, par la formule des résidus, puisque l'indice de γ_R par rapport à $i\pi$ vaut 1, que pour tout $R > 0$,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz = -2i\pi e^{i\pi x}.$$

La somme des deux intégrales le long des segments horizontaux est — avec les notations du cours, pour faire bref —

$$\int_{S(-R,R)} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz + \int_{S(2i\pi+R,2i\pi-R)} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz = (1 - e^{2i\pi x}) \int_{-R}^R \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt.$$

La limite de cette dernière intégrale lorsque R tend vers $+\infty$ est $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt$; en effet, puisque $0 < x < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt$ est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $\mathbb{R}$.

Enfin, les deux segments verticaux : d'une part, par majoration standard, en utilisant la seconde inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{S(R,R+2i\pi)} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{xR}}{e^R - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part, toujours par majoration standard, en utilisant à nouveau la seconde inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{S(2i\pi-R,-R)} \frac{e^{xz}}{1+e^z} dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{-xR}}{1 - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

En réunissant les calculs de limites ($R \rightarrow +\infty$) ci-dessus, on trouve que

$$-2i\pi e^{i\pi x} = (1 - e^{2i\pi x}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt = -2i\pi \frac{e^{i\pi x}}{1 - e^{2i\pi x}} = -2i\pi \frac{1}{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

2.5) (Question hors barème, points de bonus)

La formule (1) est-elle encore vraie lorsque x est un nombre complexe dont la partie réelle est dans l'intervalle $]0, 1[$? Pourquoi limiter la question à cette bande ouverte ?

La réponse est oui. Deux façons de procéder. On peut reprendre les calculs ci-dessus et le adapter au cas où x est un complexe dont la partie réelle est dans l'intervalle $]0, 1[$. Autre façon de faire : on peut montrer que l'application $z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xt}}{1+e^t} dt$ est holomorphe sur la bande $\{z, 0 < \Re(z) < 1\}$, ce qui repose sur l'inégalité de domination

$$\forall x \in \mathbb{C}, a \leq \Re(x) \leq b \implies \left| \frac{e^{xt}}{1+e^t} \right| = \frac{e^{t\Re(x)}}{1+e^t} \leq \frac{e^{at}}{1+e^t} \mathbf{1}_{t \leq 0} + \frac{e^{bt}}{1+e^t} \mathbf{1}_{t > 0},$$

valide pour tous a et b réels vérifiant $0 < a < b < 1$. Comme la fonction du membre de droite est une fonction de t intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x , cela montre l'holomorphie proclamée plus haut. Comme $x \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi x}$ est aussi holomorphe sur cette bande, on conclut par prolongement analytique puisque l'intervalle $]0, 1[$ est une partie non discrète de la bande $\{z, 0 < \Re(z) < 1\}$.

Lorsque la partie réelle de x égale 0 ou 1, l'intégrale n'a pas de sens — ni au sens de Lebesgue puisque l'intégrand n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, ni au sens de Riemann puisque l'intégrale $\int_a^b$, calculée en intégrant par parties (prendre une primitive de $t \mapsto e^{xt}$) n'a pas de limite lorsque $a \rightarrow -\infty$ ou $b \rightarrow +\infty$.

3 Formule des compléments

Introduction La fonction Gamma d'Euler, notée Γ , est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ qui est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des entiers strictement négatifs. Elle vérifie les trois propriétés suivantes : **(FI)** $\forall z \in \mathbb{C}, (\Re(z) > 0) \implies \left(\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right)$ **(EF)** $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ **(VP)** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. L'objet de cette partie est de démontrer la *formule des compléments* d'Euler : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

3.1) Donner un argumentaire qui justifie qu'il ne peut pas y avoir deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ distinctes qui vérifient simultanément **(FI)**, **(EF)** et **(VP)**.

Deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ qui vérifient **(FI)** coïncident sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ qui n'est pas une partie discrète de $\mathbb{C}$. Par prolongement analytique, puisque $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$ est connexe, elles sont égales.

3.2) Montrer que la fonction $f : z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et vérifie $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, f(z+1) = -f(z)$. En déduire que f est 2-périodique.

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq -1}$, donc sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; la fonction $z \mapsto \Gamma(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq -1}$, donc sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Donc f , qui est le produit de ces deux fonctions, est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Ensuite, on calcule : si z n'est pas entier,

$$f(z+1) = \Gamma(z+1)\Gamma(-z) = z\Gamma(z) \times \frac{\Gamma(1-z)}{-z} = -f(z).$$

Enfin, si z n'est pas entier, $f(z+2) = f((z+1)+1) = -f(z+1) = f(z)$, ce qui montre que f est 2-périodique.

3.3) En utilisant l'équation fonctionnelle **(EF)**, montrer que la fonction $z \mapsto \Gamma(z) - \frac{1}{z}$ se prolonge en 0 en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < 1\}$.

On suppose que $-1 < \Re(z) < 1$ et que $z \neq 0$. Alors, puisque $z \mapsto \Gamma(z+1)$ est holomorphe sur $\{z, -1 < \Re(z) < 1\}$ et puisque $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(1) + zh(z)}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$$

où h est une fonction holomorphe sur $-1 < \Re(z) < 1$ — qui vérifie $h(0) = \Gamma'(1)$. C'est cela qu'il fallait démontrer.

3.4) En déduire soigneusement que la fonction $d : z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$ est entière.

La fonction d est évidemment holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < 1\} \setminus \{0\}$. Le développement limité en 0 de d s'écrit

$$d(z) = \left(\frac{1}{z} + O(1) \right) \times \left(1 + O(z) \right) - \frac{\pi}{\pi z + O(z)} = \left(\frac{1}{z} + O(1) \right) - \frac{1}{z} (1 + O(1)) \in O(1),$$

ce qui montre que 0 est un faux point singulier de d . Ainsi, d se prolonge ainsi par continuité en une fonction holomorphe sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < 1\}$; on note encore d ce prolongement. Ensuite, on utilise le fait que $f(1+z) = -f(z)$, et donc que $d(1+z) = -d(z)$ pour tout z non entier : puisque $-1 < \Re(z) < 1 \iff 0 < \Re(1-z) < 2$, on déduit de ce qui précède que d est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, -1 < \Re(z) < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re(z) < 2\} = \{z \in \mathbb{C}, -1 < \Re(z) < 2\}$. Puisque d est 2-périodique et puisque cette dernière bande ouverte a une largeur strictement supérieure à 2, cela montre que d est entière.

3.5) On note $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| \leq 1\}$. Montrer que d est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \leq 1\}$. En déduire que d est bornée sur $\mathcal{B}$.

Puisque d est entière, elle est continue — donc bornée — sur le compact $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \leq 1\}$. Puisque d est 2-périodique, elle est bornée sur la réunion

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{C}, 2n-1 \leq \Re(z) \leq 2n+1 \text{ et } |\Im(z)| \leq 1\}$$

qui est exactement la bande fermée $\mathcal{B}$.

3.6) On note $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| \geq 1\}$ et g l'application $g : z \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi z}$. (i) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\sin z|^2 = \sin^2 \Re(z) + \sinh^2 \Im(z)$ où $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z . (ii) En déduire que g est bornée sur $\mathcal{A}$.

(i) On note $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$. Alors, $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ et en passant aux modules, $|\sin z|^2 = \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$, cqfd. (ii) On en déduit que si $|\Im(z)| \geq 1$, alors $|\sin z|^2 \geq \sinh^2 1$, et donc que $\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{\pi}{\sinh \pi}$. Cela montre que g est bornée sur $\mathcal{A}$.

3.7) En utilisant l'équation fonctionnelle (**EF**), montrer que Γ est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(z) \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \geq 1\}$. En déduire que f est bornée sur $\mathcal{A}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 \leq \Re(z) \leq 1$ et $|\Im(z)| \geq 1$. Alors, $|\Gamma(z)| = \left| \frac{\Gamma(z+1)}{z} \right|$. D'une part,

$$|\Gamma(z+1)| = \left| \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} t^{\Re(z)} e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t e^{-t} dt = 1 + \frac{1}{e}$$

et, d'autre part, $|z| \geq 1$ — faire un dessin de $\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(z) \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \geq 1\}$. Ainsi, $|\Gamma(z)| \leq 1 + \frac{1}{e}$.

Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 \leq \Re(z) \leq 1$ et $|\Im(z)| \geq 1$, alors $1 - z$ vérifie aussi $0 \leq \Re(1 - z) \leq 1$ et $|\Im(1 - z)| \geq 1$. On en déduit que $|\Gamma(1 - z)| \leq 1$ et donc que $|\Gamma(z)\Gamma(1 - z)| \leq 1$, ce qui montre que f est bornée sur le fermé $\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re(z) \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \geq 1\}$.

Pour en déduire que f est bornée sur $\mathcal{A}$, on utilise d'abord l'équation fonctionnelle $f(z+1) = -f(z)$ qui montre que f est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, -1 \leq \Re(z) \leq 1 \text{ et } |\Im(z)| \geq 1\}$, puis enfin la 2-périodicité de f qui entraîne que f est bornée sur $\mathcal{A}$.

3.8) Déduire des trois questions précédentes que $d = f - g$ est bornée sur $\mathbb{C}$.

On a montré que $d = f - g$ est bornée sur $\mathcal{B}$. En outre, on a montré que f et g sont toutes les deux bornées sur $\mathcal{A}$, ce qui montre que d l'est aussi. Cela entraîne que d est bornée sur $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{C}$.

3.9) Réunir les arguments des questions précédentes pour démontrer soigneusement la formule des compléments.

La fonction d est entière et bornée : le théorème de Liouville assure qu'elle est constante. Comme, par ailleurs,

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = (\sqrt{\pi})^2 - \pi = 0,$$

cette constante est nulle, ce qui finit de prouver la formule des compléments.

Examen

– durée : deux heures –

— Bon, il faut l'écrire : aucun document ni aucun instrument électronique n'est autorisé pour cette épreuve —

1 Une inégalité de Jensen [7 points]

Soient $R > 0$, f une fonction définie et continue sur le disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$, holomorphe sur le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ et qui vérifie $f(0) \neq 0$. On note $z_1, z_2, \dots, z_n$ les zéros de f dans D , en prenant en compte leur multiplicités dans le sens où si un zéro de f est de multiplicité m , il apparaît m fois dans la liste $z_1, z_2, \dots, z_n$.

L'objet de cette partie consiste à montrer que, sous ces hypothèses, l'inégalité

$$|f(0)| \leq \frac{\|f\|_{\partial D}}{R^n} |z_1| \times |z_2| \times \dots \times |z_n| \quad (1)$$

est valide, où l'on a noté $\|f\|_{\partial D} = \sup \{|f(z)|, |z| = R\}$. Dans l'hypothèse où f ne s'annulerait pas dans D , l'assertion est vraie en convenant que $n = 0$ et que le produit $|z_1| |z_2| \dots |z_n|$ égale 1.

1.1) Justifier rapidement que $\|f\|_{\partial D} \neq +\infty$.

1.2) Quel théorème du cours permet de conclure immédiatement lorsque $n = 0$?

1.3) On note g la fonction définie sur $\overline{D}$ par

$$\forall z \in \overline{D}, g(z) = \prod_{k=1}^n \frac{R(z_k - z)}{R^2 - \overline{z_k}z}.$$

Montrer que g est continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D .

1.4) On note $h = \frac{f}{g}$. Montrer que h est continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D .

1.5) Montrer que $\frac{R(w-z)}{R^2 - \overline{w}z}$ est de module 1 lorsque $|z| = R$ et $|w| < R$. En appliquant le principe du module maximum, en déduire que $|h(z)| \leq \|f\|_{\partial D}$, pour tout $z \in \overline{D}$.

1.6) Calculer $g(0)$ et en déduire l'inégalité (1).

1.7) (Hors barème, un peu brutalement, pour aller plus loin)

Pour tout $x \geq 0$, on note $\nu(x)$ le nombre de zéros de f dans le disque fermé $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq x\}$. Démontrer que

$$\int_0^R \nu(x) \frac{dx}{x} \leq \log \|f\|_{\partial D} - \log |f(0)|.$$

2 Une intégrale à la Jensen [13 points]

L'objet de cette partie consiste à démontrer l'égalité

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0. \quad (2)$$

Si z est un nombre complexe, on note respectivement $\Re(z)$ et $\Im(z)$ ses parties réelle et imaginaire. On note aussi $\mathcal{P}$ le demi-plan

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 1\}.$$

2.1) Justifier rapidement que la fonction $\theta \mapsto \log |1 - e^{i\theta}|$ est intégrable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2.2) Montrer qu'il existe une unique fonction r holomorphe sur $\mathcal{P}$ telle que

$$\begin{cases} \forall z \in \mathcal{P}, e^{r(z)} = 1 - z \\ r(0) = 0. \end{cases}$$

2.3) Justifier rapidement que la fonction $z \mapsto \frac{r(z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.

2.4) Pour tout $z \in \mathcal{P}$, calculer $\Re(r(z))$ en fonction de z et montrer que $\Im(r(z)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2.5) Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$, on note Γ_ε et γ_ε les deux chemins

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\varepsilon : & [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto e^{it} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_\varepsilon : & [-\frac{\pi-\varepsilon}{2}, \frac{\pi-\varepsilon}{2}] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto 1 - 2e^{-it} \sin \frac{\varepsilon}{2}. \end{array}$$

(i) Montrer que $\Gamma_\varepsilon(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(\frac{\pi-\varepsilon}{2})$ et que $\Gamma_\varepsilon(2\pi - \varepsilon) = \gamma_\varepsilon(-\frac{\pi-\varepsilon}{2})$.

(ii) On note $\ell(\varepsilon)$ le concaténé de Γ_ε et de γ_ε , dans cet ordre. La question précédente assure que $\ell(\varepsilon)$ est un lacet. Dessiner le support de $\ell(\varepsilon)$.

2.6) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer soigneusement les deux égalités

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \Re \left(\frac{1}{i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz \right) = \Re \left(i \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz \right). \quad (3)$$

2.7) En appliquant une majoration standard au dernier membre de (3), montrer que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0.$$

2.8) Rassembler les résultats des questions précédentes pour démontrer (2).



Examen : un corrigé succinct

1 Une inégalité de Jensen

1.1) Le bord de D est (évidemment) compact. Toute fonction continue sur un compact est bornée : $\|f\|_{\partial D} = \max \{|f(z)|, |z| = R\}$ est un nombre réel.

1.2) Lorsque $n = 0$, l'assertion devient $|f(0)| \leq \|f\|_{\partial D}$, ce qui est garanti par le principe du module maximum puisque ce dernier assure que le maximum de $|f|$ sur le compact $\overline{D}$ est atteint sur son bord.

1.3) La fonction g est une fraction rationnelle : elle est holomorphe sur le complémentaire de ses pôles et continue sur toute partie de ce complémentaire. Or, les pôles de g sont tous hors de $\overline{D}$ puisque ces pôles sont les $\frac{R^2}{z_k}$ dont le module est strictement supérieur à R — se rappeler que les z_k sont dans D . Donc f est continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D .

1.4) Puisque f et g sont continues sur $\overline{D}$ et holomorphes sur D , il suffit de montrer que h est holomorphe en les zéros de g , à savoir les z_k . Or, si ζ est un zéro de f (l'un des z_k , en somme) et si m est la multiplicité de f en ζ , alors f et g sont toutes les deux de la forme $(z - \zeta)^m \varphi(z)$ où φ est holomorphe sur un voisinage de ζ , sur lequel elle ne s'annule pas. Ainsi, les z_k sont des faux points singuliers de $h = \frac{f}{g}$ qui se trouve ainsi holomorphe sur D .

1.5) On suppose que $|z| = R$ et $|w| < R$. Alors, $|R^2 - \overline{w}z| = \left| R^2 - \frac{\overline{w}R^2}{\overline{z}} \right| = \frac{R^2}{|\overline{z}|} (\overline{z} - \overline{w}) = R(\overline{z} - \overline{w})$ si bien que $\left| \frac{R(w-z)}{R^2 - \overline{w}z} \right| = 1$. En particulier, cela montre que le module de g est 1 sur le cercle ∂D , ou encore que $|h(z)| = |f(z)|$ pour tout $z \in \partial D$. Alors, le principe du module maximum appliqué à h assure que $|h(z)| \leq \|h\|_{\partial D} = \|f\|_{\partial D}$, pour tout $z \in \overline{D}$, ce qu'il fallait démontrer.

1.6) On calcule : $g(0) = \prod_{k=1}^n \frac{Rz_k}{R^2} = \frac{\prod_{k=1}^n z_k}{R^n}$. Ecrire que $|h(0)| = \left| \frac{f(0)}{g(0)} \right| \leq \|f\|_{\partial D}$ conduit directement à l'inégalité cherchée — dite de Jensen.

1.7) (Hors barème) On prend le logarithme dans l'inégalité de Jensen. Il vient $\log \|f\|_{\partial D} - \log |f(0)| \geq \sum_{k=1}^n \log \frac{R}{|z_k|}$. Or, $\log \frac{R}{|z_k|} = \int_{|z_k|}^R \frac{dx}{x}$, si bien que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log \frac{R}{|z_k|} &= \sum_{k=1}^n \int_{|z_k|}^R \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} \frac{dx}{x} + \int_{|z_{k+1}|}^{|z_{k+2}|} \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{|z_{n-1}|}^{|z_n|} \frac{dx}{x} + \int_{|z_n|}^R \frac{dx}{x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} \frac{dx}{x} + n \int_{|z_n|}^R \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Or, si on ordonne les z_k en faisant en sorte que $|z_1| \leq \cdots \leq |z_n|$, alors la fonction ν est constante égale à k sur l'intervalle $[|z_k|, |z_{k+1}|[$ (lorsque ce dernier est non vide) et vaut n sur $[|z_n|, R]$. On obtient

$$\log \|f\|_{\partial D} - \log |f(0)| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{|z_k|}^{|z_{k+1}|} \nu(x) \frac{dx}{x} + \int_{|z_n|}^R \nu(x) \frac{dx}{x} = \int_{|z_1|}^R \nu(x) \frac{dx}{x} = \int_0^R \nu(x) \frac{dx}{x},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2 Une intégrale à la Jensen

2.1) Lorsque θ tend vers 0, l'intégrand est négatif et vérifie $\log|1 - e^{i\theta}| \sim \log|\theta|$. Par comparaison des intégrales de fonctions positives, puisque $\theta \mapsto \log \theta$ est intégrable au voisinage de 0 (on en calcule aisément une primitive qui se prolonge par continuité en 0 par 0), c'est aussi le cas de $\theta \mapsto \log|1 - e^{i\theta}|$. L'intégrand est 2π -périodique et continu sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui montre l'intégrabilité sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. En particulier sur $[0, 2\pi]$.

2.2) Le demi-plan $\mathcal{P}$ est simplement connexe et la fonction $1 - z$ ne s'annule pas sur $\mathcal{P}$. Le théorème de relèvement de l'exponentielle assure ainsi l'existence d'une fonction holomorphe sur $\mathcal{P}$, que l'on note r_0 telle que $e^{r_0(z)} = 1 - z$. En particulier, $r_0(0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Puisque $\mathcal{P}$ est connexe, deux relèvements diffèrent d'une fonction constante puisque leur différence, qui est aussi holomorphe, est dans le discret $2i\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc une unique r qui a les propriétés requises — c'est $r = r_0 - r_0(0)$.

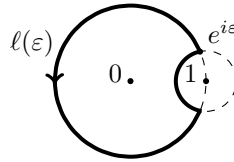
A vrai dire, puisque $z \in \mathcal{P} \implies \Re(1 - z) > 0$, on a évidemment $r(z) = \log(1 - z)$ où $\log$ désigne le logarithme principal. On pouvait aussi répondre comme cela, en arguant seulement de la connexité de $\mathcal{P}$ pour l'unicité.

2.3) La fonction $z \mapsto \frac{r(z)}{z}$ est évidemment holomorphe sur $\mathcal{P} \setminus \{0\}$ puisque r est holomorphe sur $\mathcal{P}$. Comme $r(0) = 0$, l'origine est un faux point singulier pour r , ce qui montre que $z \mapsto \frac{r(z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.

2.4) Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors, $\exp(\Re(r(z))) = |1 - z|$ si bien que $\Re(r(z)) = \log|1 - z|$, puisque $|1 - z|$ est strictement positif. En outre, l'image par le logarithme principal du demi-plan ouvert $\{z, \Re(z) > 0\}$ est la bande $\{z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < \Im(z) < \frac{\pi}{2}\}$, ce qui prouve que $\Im(r(z)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathcal{P}$.

2.5) (i) On calcule : $\gamma_\varepsilon\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right) = 1 - 2\sin\frac{\varepsilon}{2}e^{-i\frac{\pi-\varepsilon}{2}} = 1 + 2ie^{\frac{i\frac{\pi}{2}-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}}e^{i\frac{\varepsilon}{2}} = e^{i\varepsilon} = \Gamma_\varepsilon(\varepsilon)$. L'autre égalité demandée est obtenue en conjuguant celle-là. [Enfin, si on a très envie de refaire le calcul, on peut, hein ?]

(ii) On dessine[♠], en notant que le support de Γ_ε est contenu dans le cercle trigonométrique alors que celui de γ_ε est contenu dans le cercle de centre 1 et de rayon $2\sin\frac{\varepsilon}{2}$.



2.6) On paramètre :

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(e^{i\theta}) i d\theta$$

si bien que

$$\Re\left(\frac{1}{i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz\right) = \Re\left(\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(e^{i\theta}) d\theta\right) = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \Re(r(e^{i\theta})) d\theta = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log|1 - e^{i\theta}| d\theta$$

le dernière égalité venant de la question **2.4)**. Voilà pour la première égalité demandée.

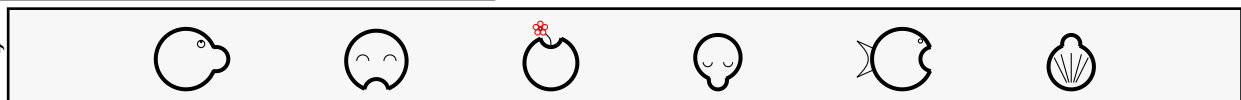
L'intégrale de la fonction holomorphe sur $\mathcal{P}$ sur le lacet $\ell(\varepsilon)$, dont le support est contenu dans $\mathcal{P}$, est nulle selon le théorème de Cauchy. Cela montre que

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz = - \oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz.$$

On multiplie par $-i$, on prend les parties réelles ; on obtient ainsi la seconde égalité demandée.

2.7) On reprend la question précédente :

$$\left| \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log|1 - e^{i\theta}| d\theta \right| = \left| \Re\left(i \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz\right) \right| \leq \left| \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{r(z)}{z} dz \right|.$$



Or, la longueur de γ_ε est inférieure ou égale au périmètre du cercle qui contient son support, à savoir $4\pi \sin \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, si z est dans le support de γ_ε , alors $|z| \geq 1 - 2 \sin \frac{\varepsilon}{2}$ et, d'après la question **2.4**,

$$|r(z)|^2 = \Re(r(z))^2 + \Im(r(z))^2 \leq \log^2 |1 - z| + \frac{\pi^2}{4} = \log^2 \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\pi^2}{4}.$$

La majoration standard implique alors que

$$\left| \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta \right| \leq \frac{\sqrt{\log^2 \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\pi^2}{4}}}{1 - 2 \sin \frac{\varepsilon}{2}} 4\pi \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce second membre est équivalent, lorsque ε tend vers 0 par valeurs positives, à $2\pi\varepsilon \log \varepsilon$ qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 : on a montré que $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$.

2.8) Puisque l'intégrand est continu presque partout et intégrable sur $[0, 2\pi]$, l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann généralisée sont égales. Ainsi,

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Examen partiel (une heure et demie)

1 Questions de cours (3 points)

- 1) Donner le développement en série entière de $\sin z$ au voisinage de 0. Que vaut son rayon de convergence ?
- 2) Soient $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = \exp(2i\pi t)$, et $n \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\int_{\gamma} z^n dz$?

2 Premier exercice (7 points)

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Pour tout $a \in U$, on note

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(a)(z - a)^n$$

le développement en série entière de f au voisinage de a . On admet la propriété de topologie élémentaire suivante : *dans un compact, toute partie infinie contient un point d'accumulation.*

1) Question de cours

Si $a \in U$ et si n est un entier naturel, écrire $c_n(a)$ en fonction de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .

- 2) On suppose, jusqu'à la fin du problème, que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in U, \exists n \in \mathbb{N}, c_n(a) = 0.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{E}_n$ la partie de U définie par

$$\mathcal{E}_n = \{a \in U, c_n(a) = 0\}.$$

Montrer que si D est un disque fermé de U de rayon non nul, alors $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D \cap \mathcal{E}_n$.

En déduire que l'un au moins des $D \cap \mathcal{E}_n$ est une partie infinie de D .

- 3) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f soit la fonction nulle sur U .
- 4) Montrer que f est nécessairement polynomiale.

3 Second exercice (10 points)

1) Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on note

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}. \quad (1)$$

Est-il vrai que f est une fonction paire et 1-périodique ?

2*) Montrer que la série de fonctions (1) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

3) Dédurre de la question précédente :

(i) que f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;

(ii) que la fonction $z \mapsto f(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

4) Soit $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$, où le symbole $\Re$ désigne la partie réelle. Dessiner $\mathcal{B}$.

Montrer que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a l'inégalité $(x-n)^2 \geq (|n| - \frac{1}{2})^2$.

En déduire que la fonction $z \mapsto f(z) - \frac{1}{z^2}$ est bornée sur $\mathcal{B}$.

5) Soit g la fonction sur $\mathbb{C}$ définie par la formule

$$g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2.$$

Montrer que g est holomorphe et 1-périodique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que $z \mapsto g(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe au voisinage de 0.

6) Soient z un nombre complexe. On note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire. Montrer que

$$|\sin z|^2 = (\sin x)^2 + (\sinh y)^2$$

(on rappelle que $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$). En déduire que la fonction $z \mapsto g(z) - \frac{1}{z^2}$ est bornée sur $\mathcal{B}$.

7) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

[Indication : on pourra considérer la fonction $f - g$ et montrer qu'elle se prolonge en une fonction définie, holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$.]

NB : la question 2*) est un peu plus technique. On peut bien sûr en admettre le résultat pour faire les questions suivantes.

Corrigé succinct de l'examen partiel

1 Premier exercice

1) $c_n(f, a) = f^{(n)}(a)/n!$.

2) Pour tout $a \in D$, a est dans au moins l'un des $\mathcal{E}_n$ (propriété de f), ce qui signifie exactement que D est inclus dans la réunion des $\mathcal{E}_n$. D'où l'égalité. Comme D est infini et non dénombrable (son rayon n'est pas nul), au moins l'un des $D \cap \mathcal{E}_n$ est infini (et même non dénombrable).

3) Soit D comme dans 2) et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D \cap \mathcal{E}_n$ soit infini. Alors, $f^{(n)}$ s'annule sur $D \cap \mathcal{E}_n$ qui contient un point d'accumulation puisque D est compact. Par le théorème du prolongement analytique, puisque U est connexe, la fonction analytique $f^{(n)}$ est identiquement nulle sur U .

4) Soient $a \in U$ et B un disque ouvert centré en a , contenu dans U . Puisque $f^{(n)}$ est nulle sur B , f est égale sur B à la fonction polynomiale

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k.$$

Par le théorème du prolongement analytique, puisque U est connexe, f égale ce polynôme sur U tout entier.

2 Second exercice

1) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, alors $|\frac{1}{z-n}| \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, par comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_n \frac{1}{(z-n)^2}$ est absolument convergente, donc convergente. Puisque $n \mapsto -n$ et $n \mapsto 1-n$ sont des bijections de $\mathbb{Z}$ sur lui-même, la fonction f est paire et 1-périodique.

2) Puisque f est 1-périodique, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de la bande pointée $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ où $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$. Comme tout compact de $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ est contenu dans le complémentaire dans $\mathcal{B}$ d'une boule centrée en 0, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur toute bande trouée de la forme $\mathcal{B} \setminus \{z, |z| \geq \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$. Or, si z vérifie simultanément $-\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}$ et $|z| \geq \varepsilon$, on a $|z-n|^2 = |z|^2 - 2|n|\Re z + n^2 \geq n^2 - |n| + \varepsilon^2$. Ainsi, puisque $\frac{1}{n^2 - |n| + \varepsilon^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente (indexée par $\mathbb{Z}$), la série de fonctions qui définit f est normalement convergente, et donc uniformément convergente, sur la bande trouée.

3) Comme une limite uniforme (sur tout compact) de fonctions holomorphes est holomorphe, la question 2) entraîne que f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que $f(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^*$.

4) $\mathcal{B}$ est la bande verticale (fermée) délimitée par les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.

On suppose que $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ et que $n \in \mathbb{Z}^*$. Si $n \geq 1$, alors $0 \leq n - \frac{1}{2} \leq n - x$ et donc $(n - \frac{1}{2})^2 \leq (n - x)^2$. Si au contraire $n \leq -1$, alors $0 \leq -\frac{1}{2} - n \leq x - n$ et donc $(\frac{1}{2} + n)^2 \leq (x - n)^2$. Dans tous les cas, si $n \neq 0$, alors $(x - n)^2 \geq (|n| - \frac{1}{2})^2$. [On pouvait aussi voir cette inégalité sur les distances : $d(x, n) \geq d(x, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, éclairée par un dessin.]

En particulier, si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{Z}^*$, alors $\left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| = \frac{1}{(n-x)^2 + y^2} \leq \frac{1}{(n-x)^2} \leq \frac{1}{(|n| - \frac{1}{2})^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Alors, si $z \in \mathcal{B}$, on obtient en sommant

$$\left| f(z) - \frac{1}{z^2} \right| \leq \left| \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{|z - n|^2} \right| \leq \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{(|n| - \frac{1}{2})^2} \quad (= \pi^2).$$

5) Comme quotient de fonctions entières, g est définie et holomorphe hors des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Comme $\sin(z + \pi) = -\sin z$, la fonction g est paire. Elle est 1-périodique puisque $z \mapsto \sin \pi z$ l'est.

Enfin, puisque $\sin^2(\pi z) = \pi^2 z^2 (1 + z^2 \varphi(z))$ où φ est une fonction entière, $g(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + z^2 \varphi(z)} = \frac{1}{z^2} (1 + z^2 \psi(z))$ où ψ est holomorphe au voisinage de 0. Ainsi, $g(z) - \frac{1}{z^2} = \psi(z)$ est holomorphe au voisinage de l'origine.

6) D'un côté, $|\sin z|^2 = \frac{1}{4} |e^{iz} - e^{-iz}|^2 = \frac{1}{4} [e^{iz} - e^{-iz}][e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}] = \frac{1}{4} [-e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y} + e^{-2y}]$. De l'autre, $(\sin x)^2 + (\sinh y)^2 = \frac{1}{4} [-(e^{ix} - e^{-ix})^2 + (e^y - e^{-y})^2] = \frac{1}{4} [-e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y} + e^{-2y}]$. La fonction $g(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe, donc continue, sur $\mathcal{B}$. Pour montrer qu'elle est bornée, il suffit donc de montrer qu'elle est bornée hors du compact $\mathcal{B} \cap \{z, |\Im z| \leq 1\}$, où $\Im$ désigne la partie imaginaire. Or, si $z = x + iy$ avec $|y| > 1$, alors $|1/z^2| \leq 1/y^2 < 1$ et $|g(z)| = \pi^2 / |\sin \pi z|^2 \leq \pi^2 / \sinh^2 y \leq \pi^2 / \sinh^2 1$, ce qui finit de montrer que $g - 1/z^2$ est bornée sur $\mathcal{B}$.

7) On se base sur l'égalité $f(z) - g(z) = [f(z) - 1/z^2] - [g(z) - 1/z^2]$ pour tout z non entier. Chacun des crochets de cette formule se prolonge en une fonction holomorphe et bornée sur $\mathcal{B}$. Ainsi, $f - g$ se prolonge-t-elle en une fonction holomorphe et bornée sur $\mathcal{B}$. Comme elle est 1-périodique (f et g le sont), elle est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier : c'est une fonction entière et bornée. D'après le théorème de Liouville, on en déduit qu'elle est constante. Il reste à déterminer la valeur de cette constante. Lorsque $y \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$, alors $f(iy)$ tend vers 0 (par exemple, la convergence de la série est dominée, on passe à la limite sous le signe somme) et $g(iy)$ tend aussi vers 0 (en utilisant l'inégalité du **6**). Ainsi, $(f - g)(iy)$ tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$: la fonction constante $f - g$ est nulle, ce qui démontre la formule voulue.

Examen (deux heures)

1 Questions de cours (3 points)

- (1) La formule $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, est-elle encore vraie si $x \in \mathbb{C}$?
- (2) Énoncer le théorème du prolongement analytique.

2 Un calcul d'intégrale par résidus (9 points)

Soient a et b deux réels strictement positifs et soit

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \exp\left(i\left(az - \frac{b}{z}\right)\right).$$

- (1) **Question de cours.** Montrer que 0 est un point singulier essentiel de la fonction $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.
- (2) Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Quels sont les pôles de f ? Calculer les résidus en tous les pôles de f .
- (3) Pour $\theta \in [0, \pi]$ et $r > 0, r \neq 1$, soit $z = re^{i\theta}$ un point du demi-cercle du demi-plan supérieur, de centre 0 et de rayon r .

(a) Calculer $\left| \exp\left(i\left(az - \frac{b}{z}\right)\right) \right|$ en fonction de a, b, r, θ .

(b) En déduire que $|f(z)| \leq \frac{1}{|r^2 - 1|}$.

- (4) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $R > 1$. Soit Γ_R le demi-cercle du demi-plan supérieur, de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Soit γ_ε le demi-cercle du demi-plan supérieur, de centre 0 et de rayon ε parcouru une fois dans le sens inverse du sens trigonométrique.

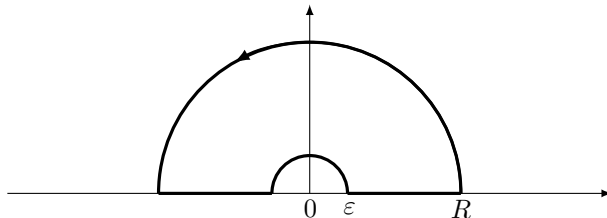
(a) Utiliser (2)(b) pour montrer que $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

(b) Utiliser (2)(b) pour montrer que $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

- (5) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx.$$

(6) Soit $\gamma_{\varepsilon,R}$ le lacet simple dessiné ci-dessous.



Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) dx.$$

3 Théorème de Phragmen-Lindelöf (8 points)

Soit $B = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \frac{\pi}{2}\}$, où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z . On note $\overline{B}$ l'adhérence de B et ∂B la frontière de B .

(1) Dessiner B .

(2) Soit $\varphi(z) = e^{e^z}$.

(a) Montrer que pour tout $z \in \partial B$, $|\varphi(z)| = 1$.

(b) Montrer que φ n'est pas bornée sur B .

(3) Soit f une fonction continue sur $\overline{B}$ et holomorphe sur B et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall z \in \partial B, |f(z)| \leq 1$;

(ii) $\forall z \in B, |f(z)| \leq \exp(Ae^{c|\Re(z)|})$,

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z , où A est un réel strictement positif et c est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

L'objectif de la suite est de montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in B$ (Phragmen-Lindelöf).

(a) Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et $b \in]c, 1[$, on pose

$$h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(e^{bz} + e^{-bz})).$$

La fonction h_ε est-elle holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{B}$?

(b) Montrer que pour tout $z \in \overline{B}$, si on note $x = \Re(z)$,

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp \left[Ae^{c|x|} - \varepsilon \cos \left(\frac{b\pi}{2} \right) e^{b|x|} \right].$$

(c) En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $z \in \overline{B}$ avec $|\Re(z)| \geq \rho$, on a $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$.

(d) En appliquant le principe du module maximum sur un compact bien choisi, montrer que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ sur $\overline{B}$. En déduire que $|f(z)| \leq 1$ sur $\overline{B}$.

(4) Le résultat subsiste-t-il quand $c = 1$?

Corrigé succinct de l'examen

1 Questions de cours

1) La fonction $z \mapsto \cos 2z - \cos^2 z + \sin^2 z$ est entière, nulle sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas une partie discrète de $\mathbb{C}$, et puisque $\mathbb{C}$ est connexe, le théorème du prolongement analytique assure qu'elle est nulle sur $\mathbb{C}$. La réponse est donc OUI.

2 Un calcul d'intégrale par résidus

(1) Si n est n'importe quel entier naturel, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{1/x} = +\infty$; cela montre que $z^n e^{1/z}$ n'est pas borné au voisinage de 0, qui est donc un point singulier essentiel de f .

(2) Hormis 0, les points singuliers de f sont i et $-i$, qui sont des pôles simples. En i et en $-i$, la fonction f s'écrit sous la forme u/v où u est holomorphe et v a un zéro simple. Dans ces conditions, le résidu en a est $u(a)/v'(a)$. On trouve $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i} e^{-a-b}$ et $\text{Res}(f, -i) = \frac{-1}{2i} e^{a+b}$.

(3)(a) Si $z = re^{i\theta}$, alors $|e^{iaz}| = e^{\Re(iaz)} = e^{-ar \sin \theta}$ et $|e^{-ib/z}| = |e^{-ibe^{-i\theta}/r}| = e^{-b \sin \theta/r}$. Ainsi,

$$\left| \exp \left(i \left(az - \frac{b}{z} \right) \right) \right| = e^{-(ar+b/r) \sin \theta}.$$

(3)(b) Grâce à la seconde inégalité triangulaire, on déduit de (3)(a) que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{||z|^2 - 1|} \left| \exp \left(i \left(az - \frac{b}{z} \right) \right) \right| = \frac{1}{|r^2 - 1|} e^{-(ar+b/r) \sin \theta} \leq \frac{1}{|r^2 - 1|},$$

la dernière inégalité venant du fait que $\sin \theta \geq 0$ (a, b et r sont également (strictement) positifs).

$$(4)(a) \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \max_{\Gamma_R} |f| \times \text{Longueur}(\Gamma_R) \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

$$(4)(b) \left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma_\varepsilon} |f| \times \text{Longueur}(\gamma_\varepsilon) \leq \frac{\pi \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

(5) Si $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ ($\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$). Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'une part, $\Im f(x) = \frac{1}{1+x^2} \sin(ax - b/x)$ est une fonction impaire ; donc

$$\int_{\mathbb{R}} \Im f(x) dx = 0.$$

D'autre part, la fonction $\Re f(x) = \frac{1}{1+x^2} \cos(ax - b/x)$ est paire ; donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Re f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx.$$

Ainsi, puisque $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \Re f(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \Im f(x) dx$, la formule est démontrée.

(6) Pour tout $R > 1$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, puisque le lacet $\gamma_{\varepsilon, R}$ est simple, le théorème des résidus montre que

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i) = \pi e^{-(a+b)}. \quad (1)$$

Par ailleurs, en découpant le lacet en quatre arcs, on obtient

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx. \quad (2)$$

Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$

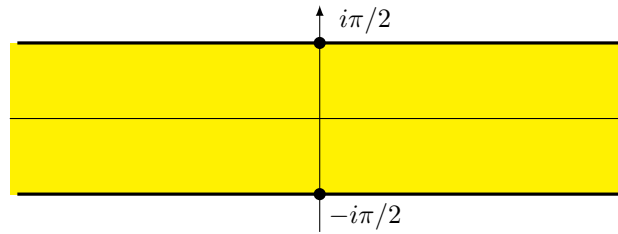
$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad (3)$$

Grâce à la question (4), les intégrales le long des demi-cercles tendent vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ respectivement. En passant à la limite dans (2), en utilisant (1), (3) et la question (5), on obtient que $I = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)}$.

3 Théorème de Phragmen-Lindelöf

Soit $B = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \frac{\pi}{2}\}$, où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z . On note $\overline{B}$ l'adhérence de B et ∂B la frontière de B .

(1)



(2)(a) Si $z \in \partial B$, alors $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y = \pm\pi/2$. On en déduit que $|\exp(e^z)| = \exp(\Re(e^z)) = \exp(e^x \cos y) = \exp(0) = 1$.

(2)(b) La bande B contient la demi-droite $\mathbb{R}_+$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{e^x} = +\infty$. Donc f n'est pas bornée sur B .

(3)(a) Comme composée de fonctions entières, h_ε est entière, donc holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}$ qui contient $\overline{B}$.

(3)(b) Pour tout $z \in \overline{B}$, si $z = x + iy$ où x et y sont réels,

$$|h_\varepsilon(z)| = \exp(-\varepsilon \Re(e^{bz} + e^{-bz})) = \exp(-\varepsilon \cos by (e^{bx} + e^{-bx})).$$

Comme $0 < b < 1$ et $|y| \leq \pi/2$, on a $|by| \leq b\pi/2 < \pi/2$, d'où $\cos by \geq \cos b\pi/2 > 0$. Par ailleurs, $e^{bx} + e^{-bx} \geq \max\{e^{bx}, e^{-bx}\} = e^{b|x|}$. En regroupant on obtient que pour tout $z \in \overline{B}$,

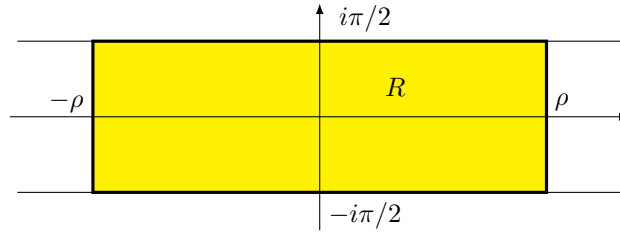
$$|h_\varepsilon(z)| \leq \exp\left(-\varepsilon e^{b|x|} \cos \frac{b\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Ainsi, si $z \in B$, on a $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp(Ae^{c|x|}) \exp(-\varepsilon e^{b|x|} \cos \frac{b\pi}{2})$ qui est le résultat demandé.

Il reste le bord de B : si $z \in \partial B$, $|f(z)| \leq 1 \leq \exp(Ae^{c|x|})$ et l'inégalité visée est encore vérifiée.

(3)(c) L'inégalité du (3)(b) montre que $\lim_{z \in \overline{B}, \Re z \rightarrow \pm\infty} f(z) = 0$ puisque $0 < c < b$. En particulier, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $z \in \overline{B}$, $|\Re z| \geq \rho \implies |f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$.

(3)(d)



L'inégalité $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ de (3)(c) est vraie en particulier sur les segments verticaux $\overline{B} \cap \{z, \Re z = \pm\rho\}$. Sur les segments horizontaux $\{z, -\rho \leq \Re z \leq \rho, \Im z = \pm\pi/2\}$, $|f(z)| \leq 1$ par hypothèse sur f et $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ d'après (4) ; donc $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ est vraie sur le bord du rectangle $R =]-\rho, \rho[+ i] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (jaune sur le dessin) délimité par les quatre segments décrits. Comme fh_ε est holomorphe sur l'ouvert R , le principe du module maximum assure que l'inégalité $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ est encore vraie sur l'adhérence $\overline{R}$ de R . Enfin, puisque $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$ est vraie lorsque z est dans la bande $\overline{B}$ mais hors du rectangle R (question (3)(c), choix de ρ), elle est vraie pour tout $z \in \overline{B}$. Soit $z \in \overline{B}$. En passant à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$) dans l'inégalité $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1$, on obtient que $|f(z)| \leq 1$, puisque $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(e^{bz} + e^{-bz}))$ tend vers 1 lorsque ε tend vers 0.

(4) L'exemple de la fonction e^{e^z} , traité à la question (1), montre que le résultat de Phragmen-Lindelöf tombe en défaut lorsque $c = 1$.

Contrôle – session de rattrapage (une heure)

1 Question de cours

Enoncer le théorème des résidus.

2 Exercice

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}.$$

(1) Sur quelle partie de $\mathbb{C}$ la fonction f est-elle holomorphe ? Méromorphe ? Ecrire la décomposition de f en éléments simples.

Les questions suivantes peuvent se traiter séparément.

(2) Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z + 2| < 1\}$.

(a) Dessiner D .

(b) Calculer les dérivées successives de f et en déduire pour tout $z \in D$, le développement de Laurent de f de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z + 2)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{d_n}{(z + 2)^n},$$

où l'on précisera c_n et d_n .

(3) Calculer le développement de Laurent de f sur la couronne $\{z \in \mathbb{C}, 2 < |z| < 3\}$, de la forme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

où l'on précisera a_n .

(4) Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ l'arc défini par $\gamma(t) = \frac{5}{2}e^{-2i\pi t}$. Calculer

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Examen du 20 juin 2017 (deux heures)

1 Questions de cours (4 points)

- (a) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Donner la définition d'une détermination continue du logarithme sur U .
- (b) Donner la définition de la détermination principale du logarithme, notée Log , notamment son domaine de définition $\mathcal{D}$.
- (c) Préciser la partie du plan complexe image par Log de $\mathcal{D}$.

2 Fonction arctangente (7 points)

- 1) La fonction tangente est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Préciser son domaine de définition. Sur quelle partie de $\mathbb{C}$ est-elle holomorphe ?
- 2) Soit $S = \{iy, y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$, soit $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et soit

$$g(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Dessiner S .

Montrer que g définit une bijection biholomorphe de $\mathbb{C} \setminus S$ dans $\mathcal{D}$.

- 3) En déduire que

$$f(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$.

Préciser la partie du plan complexe image par f de $\mathbb{C} \setminus S$.

- 4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(f(x)) = x$.
 En déduire (en s'aidant d'un théorème du cours) que f est l'unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$ vérifiant $\tan(f(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus S$.

- 5) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus S$, $f'(z) = \frac{1}{1 + z^2}$.

En déduire que pour tout $z, |z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

- 6) Montrer que si $\Re(z) > 0$, alors

$$f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est la valeur de cette somme si $\Re(z) < 0$?

3 Série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique (9 points)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que f est 1-périodique, c'est-à-dire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z+1) = f(z).$$

On admet pour l'instant qu'il existe une fonction $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = h(e^{2i\pi z}).$$

Partie 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $a_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall w \in \mathbb{C}^*, h(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n.$$

Question de cours : justifier l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

3) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$a_n = \int_0^1 f(t+ib) e^{-2i\pi n(t+ib)} dt.$$

4) Est-il vrai que $a_n = \int_0^1 f(t+ib) e^{-2i\pi n(t+ib)} dt$ pour tout $b \in \mathbb{C}$?

Partie 2

Cette partie est consacrée à une preuve de la propriété des fonctions entières périodiques énoncée dans le préambule (existence de la fonction h).

5) Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, on note

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}, a < \Re(z) < b\}$$

où le symbole $\Re$ désigne la partie réelle. Dessiner $\mathcal{B}_{0,1}$ et $\mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sur un même dessin.

6) Montrer que $\mathcal{B}_{a,b}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, pour tous a et b réels tels que $a < b$.

7) On note $\mathcal{U}_1 = \{z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_+\}$ et $\mathcal{U}_2 = \{z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_-\}$. Dessiner $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

8) Montrer que l'application $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ définit une bijection biholomorphe entre $\mathcal{B}_{0,1}$ et $\mathcal{U}_1$. On note $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{0,1}$ sa réciproque.

9) Quelle est l'image de $\mathcal{B}_{0, \frac{1}{2}}$ par $z \mapsto \exp(2i\pi z)$?

10) De même, montrer que $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ définit une bijection biholomorphe entre $\mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ et $\mathcal{U}_2$. On note $\psi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sa réciproque.

11) On reprend la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, entière et 1-périodique. Montrer qu'il existe $h_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que

$$\forall z \in \mathcal{B}_{0,1}, f(z) = h_1(e^{2i\pi z}).$$

De même, montrer qu'il existe $h_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que $\forall z \in \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, f(z) = h_2(e^{2i\pi z})$.

12) Pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, on note

$$h(w) = \begin{cases} h_1(w) & \text{si } w \in \mathcal{U}_1 ; \\ h_2(w) & \text{si } w \in \mathcal{U}_2. \end{cases}$$

Montrer que ces relations définissent une application $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = h(e^{2i\pi z}).$$

Examen (deux heures)

1 Questions de cours (points)

2 Série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique(points)

1) Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, on note

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}, a < \Re(z) < b\}$$

où le symbole $\Re$ désigne la partie réelle. Dessiner $\mathcal{B}_{0,1}$ et $\mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sur un même dessin.

Zut pour le dessin.

2) Montrer que $\mathcal{B}_{a,b}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, pour tous a et b réels tels que $a < b$.

La bande $\mathcal{B}$ est ouverte, comme image réciproque de l'intervalle ouvert $]0,1[$ par la fonction continue $z \mapsto \Re(z)$.

3) On note $\mathcal{U}_1 = \{z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_+\}$ et $\mathcal{U}_2 = \{z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_-\}$. Dessiner $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

Encore zut pour le dessin.

4) Montrer que l'application $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ définit une bijection biholomorphe entre $\mathcal{B}_{0,1}$ et $\mathcal{U}_1$. On note $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{0,1}$ sa réciproque.

On note $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(2i\pi z)$. On montre d'abord que $\varphi(\mathcal{B}_{0,1}) = \mathcal{U}_1$. En effet, si $z = x + iy \in \mathcal{B}_{0,1}$ où $0 < x < 1$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(z) = e^{-2\pi y} e^{2i\pi x} \in \mathcal{U}_1$, ce qui montre que $\varphi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{U}_1$. En outre, si $w = re^{i\theta} \in \mathcal{U}_1$ où $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ (ce choix est possible puisque $w \notin \mathbb{R}_+$), alors $w = \varphi(\frac{\theta}{2\pi} - \frac{i \ln r}{2\pi})$, avec $\frac{\theta}{2\pi} - \frac{i \ln r}{2\pi} \in \mathcal{B}_{0,1}$; cela montre que $\varphi(\mathcal{B}_{0,1}) = \mathcal{U}_1$.

Par ailleurs, $\mathcal{U}_1$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$. Soit alors $L_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ la détermination holomorphe du logarithme qui vérifie $L_1(-1) = i\pi$, et soit $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par la formule $\psi_1(z) = \frac{L_1(z)}{2i\pi}$. Alors, ψ_1 est holomorphe (comme L_1) et vérifie $\varphi \circ \psi_1(w) = w$ pour tout $w \in \mathcal{U}_1$ et $\psi_1 \circ \varphi(z) = z$ pour tout $z \in \mathcal{B}_{0,1}$. Cela montre le résultat (la bijection et la biholomorphie).

5) Quelle est l'image de $\mathcal{B}_{0, \frac{1}{2}}$ par $z \mapsto \exp(2i\pi z)$?

C'est $\{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ (se faire un dessin).

6) De même, montrer que $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ définit une bijection biholomorphe entre $\mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ et $\mathcal{U}_2$. On note $\psi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sa réciproque.

Même raisonnement, en utilisant la détermination principale du logarithme $\mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{C}$.

7) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que f est 1-périodique, c'est-à-dire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z+1) = f(z).$$

Montrer qu'il existe $h_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que

$$\forall z \in \mathcal{B}_{0,1}, f(z) = h_1(e^{2i\pi z}).$$

De même, montrer qu'il existe $h_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que $\forall z \in \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, f(z) = h_2(e^{2i\pi z})$.

Les fonctions $h_1 = f \circ \psi_1$ et $h_2 = f \circ \psi_2$ conviennent.

8) Pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, on note

$$h(w) = \begin{cases} h_1(w) & \text{si } w \in \mathcal{U}_1 ; \\ h_2(w) & \text{si } w \in \mathcal{U}_2. \end{cases}$$

Montrer que ces relations définissent une application $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = h(e^{2i\pi z}).$$

L'holomorphicité est évidente. Il s'agit seulement de montrer que h_1 et h_2 coïncident sur l'intersection $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit donc $z \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Si $\Im(w) > 0$, soit $z \in \mathcal{B}_{0, \frac{1}{2}}$ tel que $w = e^{2i\pi z}$. Alors, $h_1(w) = f(z) = h_2(w)$. Si au contraire $\Im(w) < 0$, soit $z \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}, 1}$ tel que $w = e^{2i\pi z}$. Alors, $z-1 \in \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}, 0}$, et $h_1(w) = f(z) = f(z-1) = h_2(e^{2i\pi(z-1)}) = h_2(e^{2i\pi z}) = h_2(w)$.

9) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $a_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall w \in \mathbb{C}^*, h(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n.$$

Question de cours : justifier l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Développement en série de Laurent de h .

10) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ où C est le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens direct. En paramétrant ce chemin C par l'arc $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{2i\pi t}$, on obtient $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{h(e^{2i\pi t})}{e^{2i\pi(n+1)t}} 2i\pi e^{2i\pi t} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt$.

11) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$a_n = \int_0^1 f(t+ib) e^{-2i\pi n(t+ib)} dt.$$

Si b est un nombre réel, a_n est aussi l'intégrale curviligne $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_b} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ où C_b est le cercle de rayon $e^{-2\pi b}$ centré en l'origine, parcouru une fois dans le sens direct. Ce chemin se paramètre par $t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi(t+ib)}$, ce qui conduit au résultat par un calcul immédiat.

12) Est-il vrai que $a_n = \int_0^1 f(t+ib)e^{-2i\pi n(t+ib)} dt$ pour tout $b \in \mathbb{C}$?

La fonction $b \mapsto \int_0^1 f(t+ib)e^{-2i\pi n(t+ib)} dt$ est entière (on intègre en t sur un compact, l'intégrand est holomorphe en b). Cette fonction est constante sur $\mathbb{R}$, égale à a_n sur cette partie non discrète de $\mathbb{C}$. Par prolongement analytique, puisque $\mathbb{C}$ est connexe, la formule de la question précédente est valide pour tout $b \in \mathbb{C}$.

Examen partiel (une heure et demie)

1 Question de cours (6 points)

1.1) Donner la définition de l'indice d'un point par rapport à un lacet.

1.2) Dans le plan complexe, soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 2, parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{1+z^4}{1-z} dz.$$

1.3) Pour le même arc γ , calculer

$$\int_{\gamma} \frac{1+z^4}{(1-z)^3} dz.$$

2 Exercice (6 points)

2.1) Montrer que si une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ a une dérivée identiquement nulle, elle est constante.

2.2) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U du plan complexe. On suppose que f et g ne s'annulent pas sur U et que, pour tout $z \in U$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Montrer qu'il existe un nombre complexe C tel que, pour tout $z \in U$, $f(z) = Cg(z)$.

2.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{e^{-in^2}}{n^2 + 2}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans le disque unité ouvert, et qu'elle y converge.

2.4) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert, que l'on note $\mathcal{D}$. On suppose que f et g ne s'annulent pas sur $\mathcal{D}$, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f'(u_n)}{f(u_n)} = \frac{g'(u_n)}{g(u_n)}.$$

La fonction f/g est-elle nécessairement constante ?

3 Problème (8 points)

Le but de cette partie est de donner une preuve du théorème de l'application ouverte : si f est holomorphe non constante sur un ouvert connexe U alors l'image de U par f est un ouvert.

On raisonne par l'absurde en supposant que $f(U)$ n'est pas ouvert.

3.1) Montrer qu'il existe $x \in U$ et une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes qui converge vers $f(x)$ et qui vérifie :

$$\forall n, a_n \notin f(U).$$

3.2) Montrer que pour tout n , la fonction

$$g_n(z) = \frac{1}{f(z) - a_n}$$

est définie et holomorphe sur U .

3.3) Montrer qu'il existe $\overline{D(x, r)}$ un disque fermé de centre x et de rayon $r > 0$ contenu dans U pour lequel

$$\forall z \in \overline{D(x, r)}, (z \neq x) \implies (f(z) \neq f(x)).$$

[Indication : penser au principe des zéros isolés.]

3.4) Appliquer le principe du module maximum à g_n pour montrer qu'il existe une suite $(z_n)_n$ de points du cercle $C(x, r)$ tels que pour tout n ,

$$\frac{1}{|f(x) - a_n|} \leq \frac{1}{|f(z_n) - a_n|}.$$

3.5) Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout z sur le cercle $C(x, r)$, $|f(z) - f(x)| > \varepsilon$.

3.6) En déduire que $|f(z_n) - a_n| \geq |f(z_n) - f(x)| - |f(x) - a_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand et trouver une contradiction avec les questions 3.4) et 3.1).

Examen partiel, éléments de réponses

1 Question de cours

1.1) $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$

1.2) Si $f(z) = 1 + z^4$, cette intégrale de Cauchy est $-2i\pi f(1) = -4i\pi$.

1.3) Pour la même fonction, cette intégrale-là est $-2i\pi \times \frac{1}{2} f''(1) = -12i\pi$.

2 Exercice

2.1) Sur un disque au voisinage de n'importe quel point, on développe en série de Taylor : la fonction est constante sur le disque. Par prolongement analytique, elle est constante partout.

2.2) La fonction f/g est définie sur U , holomorphe, et sa dérivée est nulle. Elle est constante.

2.3) Immédiat en calculant son module. Elle converge vers 0.

2.4) Puisque f et g sont holomorphes, elles sont continues et leurs dérivées aussi. Par passage à la limite, l'égalité est encore vraie en 0. La dérivée de f/g est donc nulle sur l'ensemble non discret $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Par prolongement analytique, elle est nulle sur le connexe $\mathcal{D}$. Donc f/g est constante.

3 Problème

3.1) Puisque $f(U)$ n'est pas ouvert, soit $x \in U$ tel qu'aucun voisinage de $f(x)$ ne soit contenu dans $f(U)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n \in D(f(x), 2^{-n}) \setminus f(U)$. La suite $(a_n)_n$ convient.

3.2) Puisque $a_n \notin f(U)$, la fonction $f - a_n$ ne s'annule pas. Donc g_n est bien définie et holomorphe.

3.3) Puisque $f - f(x)$ est holomorphe et n'est pas constante, son zéro x est isolé.

3.4) Pour tout n , puisque le disque $\overline{D(x, r)}$ est compact, d'après le principe du module maximum, $|g|$ atteint son maximum sur le disque $\overline{D(x, r)}$ en un point z_n du cercle $C(x, r)$. En particulier, $|g_n(x)| \leq |g_n(z_n)|$, ce qui est l'inégalité voulue.

3.5) Puisque le cercle $C(x, r)$ est compact, la fonction continue $|f - f(x)|$ y est minorée par $\varepsilon = \min\{|f(z) - f(x)|, z \in C(x, r)\} > 0$.

3.6) Pour tout n , grâce à 3.4), 3.4) et la seconde inégalité triangulaire,

$$|f(z_n) - a_n| \geq |f(z_n) - f(x)| - |f(x) - a_n| \geq \varepsilon - |f(x) - a_n|.$$

Puisque a_n tend vers $f(x)$, il suffit de choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - a_n| \leq \varepsilon/2$ dès que $n \geq N$.

Pour tout $n \geq N$, on a $|f(z_n) - a_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, et donc $\frac{1}{|f(x) - a_n|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais, puisque a_n tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini, la suite $\frac{1}{|f(x) - a_n|}$ n'est pas bornée : l'hypothèse que $f(U)$ n'est pas ouvert ne tient pas.

Examen (deux heures) du 15 janvier 2018

1 Question de cours (2 points)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Que signifie “ f est bornée” ? Que signifie “ f est une fonction entière” ? Énoncer le théorème de Liouville.

2 Problème 1 (11 points)

2.1) Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si f est holomorphe au voisinage de a , le résidu en a de la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est $f'(a)$.

2.2) Soient a et b deux nombres complexes distincts. Calculer le résidu en a de la fonction

$$z \mapsto \frac{z}{(z-a)^2(z-b)^2}.$$

2.3) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que les résidus de la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{x}z + 1)^2}$ en ses pôles sont les réels $\frac{\pm x^2}{4(1-x^2)^{3/2}}$.

2.4) Soit $x \in]0, 1[$. On note γ le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que

$$\frac{4}{ix^2} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{x}z + 1)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + x \cos t)^2}.$$

2.5) En utilisant (soigneusement) la formule des résidus, en déduire la formule

$$\forall x \in]0, 1[, \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + x \cos t)^2} = \frac{2\pi}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

2.6) On note $\sqrt{\cdot}$ la détermination principale de la racine carrée. Sur quel ouvert maximal de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ est-elle holomorphe ? On note $\mathcal{O}$ cet ouvert. Dessiner $\mathcal{O}$.

2.7) Soit $z \in \mathcal{O}$. Montrer que le segment $K_z = \{1 + uz, -1 \leq u \leq 1\}$ est un compact ne contenant pas l'origine. En déduire qu'il existe $\eta_z > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |1 + z \cos t| \geq \eta_z.$$

2.8) Montrer que l'application

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + z \cos t)^2}$$

est holomorphe sur $\mathcal{O}$.

2.9) Expliquer pourquoi la formule suivante est exacte :

$$\forall z \in \mathcal{O}, \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + z \cos t)^2} = \frac{2\pi}{(\sqrt{1-z^2})^3}.$$

3 Problème 2 (7 points)

Soient r et R des nombres réels tels que $1 < r < R$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le plan complexe, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , et $\mathcal{U}$ l'ouvert

$$\mathcal{U} = D(0, R) \setminus [1, +\infty[.$$

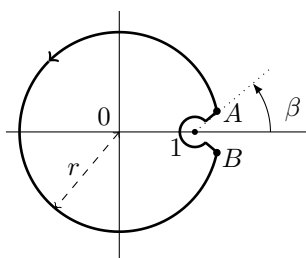
Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $[z^n]f(z)$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient du développement en série entière de f à l'origine.

3.1) Dessiner $\mathcal{U}$.

3.2) On note Log le logarithme complexe principal et $(1 - z)^\alpha = \exp[\alpha \text{Log}(1 - z)]$.

Question de cours Sur quel ouvert maximal de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto (1 - z)^\alpha$ est-elle analytique ?

3.3) Soit $\beta \in]0, \pi/2[$. On note $C(z, \rho)$ le cercle de centre z et de rayon ρ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit γ_n l'arc dessiné sur la figure, composé des quatre arcs a , b_n , c_n et d_n suivants :



(i) l'arc a part du point A , intersection de $C(0, r)$ avec la demi-droite issue de 1 faisant avec l'axe des abscisses un angle β . Il parcourt $C(0, r)$ dans le sens positif jusqu'au point B , symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

(ii) L'arc b_n part de B et rejoint $C(1, \frac{1}{n})$ le long du segment $[B, 1]$.

(iii) L'arc c_n parcourt $C(1, \frac{1}{n})$ dans le sens négatif jusqu'au point d'intersection de $C(1, \frac{1}{n})$ et du segment $[1, A]$, dont l'abscisse est $1 + \frac{1}{n}e^{i\beta}$.

(iv) L'arc d_n part de l'extrémité de c_n et rejoint A le long du segment $[1, A]$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$.

3.4) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \oint_a \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{A}{R^n}$.

3.5) On suppose que $f(z) = O_1(1 - z)^\alpha$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de 1 dans $\mathbb{C}$, un nombre réel strictement positif M tel que

$$\forall z \in V \cap \mathcal{U}, |f(z)| \leq M |(1 - z)^\alpha|.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $B > 0$ tels que $\forall n \geq N$, $\left| \oint_{c_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{B}{n^{\alpha+1}}$ (on pourra se rappeler que la suite de terme général $(1 - \frac{1}{n})^n$ converge).

3.6) Montrer que $|1 + \frac{t}{n}e^{i\beta}| \geq 1 + \frac{t}{n}\cos\beta$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En admettant¹ que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\cos\beta\right)^{-(n+1)} t^\alpha dt = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t\cos\beta} dt,$$

en déduire que, si r est choisi de sorte que $\text{Supp}(d_n) \subset V$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \oint_{d_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{C}{n^{\alpha+1}}.$$

3.7) Rassembler les résultats des questions précédentes pour démontrer le théorème de transfert suivant :

$$\text{si } f(z) = O_1(1 - z)^\alpha, \text{ alors } [z^n]f(z) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

¹C'est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Examen (deux heures) du 15 janvier 2018

1 Question de cours (2 points)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Que signifie “ f est bornée” ? Que signifie “ f est une fonction entière” ? Énoncer le théorème de Liouville.

2 Problème 1 (11 points)

2.1) Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si f est holomorphe au voisinage de a , le résidu en a de la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est $f'(a)$.

2.2) Soient a et b deux nombres complexes distincts. Calculer le résidu en a de la fonction

$$z \mapsto \frac{z}{(z-a)^2(z-b)^2}.$$

[Réponse : $-\frac{a+b}{(a-b)^3}$.]

2.3) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que les résidus de la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{x}z + 1)^2}$ en ses pôles sont les réels $\frac{\pm x^2}{4(1-x^2)^{3/2}}$.

[Réponse : les racines de $z^2 + \frac{2}{x}z + 1$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$.]

2.4) Soit $x \in]0, 1[$. On note γ le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que

$$\frac{4}{ix^2} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{x}z + 1)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + x \cos t)^2}.$$

[Paramétriser le cercle et être un peu soigneux.]

2.5) En utilisant (soigneusement) la formule des résidus, en déduire la formule

$$\forall x \in]0, 1[, \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + x \cos t)^2} = \frac{2\pi}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

2.6) On note $\sqrt{\cdot}$ la détermination principale de la racine carrée. Sur quel ouvert maximal de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ est-elle holomorphe ? On note $\mathcal{O}$ cet ouvert. Dessiner $\mathcal{O}$.

[Réponse : enlever les demi-droites $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$.]

2.7) Soit $z \in \mathcal{O}$. Montrer que le segment $K_z = \{1 + uz, -1 \leq u \leq 1\}$ est un compact ne contenant pas l'origine. En déduire qu'il existe $\eta_z > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |1 + z \cos t| \geq \eta_z.$$

[Réponse : K_z est compact comme image continue du compact $[0, 1]$. Donc fermé. Il ne contient pas 0 par définition de $\mathcal{O}$. Prendre pour η_z la distance de 0 à K_z .]

2.8) Montrer que l'application

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + z \cos t)^2}$$

est holomorphe sur $\mathcal{O}$.

[L'intégrand est majoré par η_z et l'intervalle d'intégration est compact.]

2.9) Expliquer pourquoi la formule suivante est exacte :

$$\forall z \in \mathcal{O}, \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + z \cos t)^2} = \frac{2\pi}{(\sqrt{1 - z^2})^3}.$$

[Réponse : par prolongement analytique au connexe $\mathcal{O}$.]

3 Problème 2 (7 points)

Soient r et R des nombres réels tels que $1 < r < R$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le plan complexe, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R , et $\mathcal{U}$ l'ouvert

$$\mathcal{U} = D(0, R) \setminus [1, +\infty[.$$

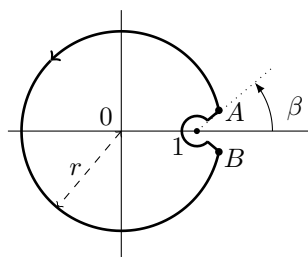
Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $[z^n]f(z)$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient du développement en série entière de f à l'origine.

3.1) Dessiner $\mathcal{U}$.

3.2) On note Log le logarithme complexe principal et $(1 - z)^\alpha = \exp[\alpha \text{Log}(1 - z)]$.

Question de cours Sur quel ouvert maximal de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto (1 - z)^\alpha$ est-elle analytique ?

3.3) Soit $\beta \in]0, \pi/2[$. On note $C(z, \rho)$ le cercle de centre z et de rayon ρ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit γ_n l'arc dessiné sur la figure, composé des quatre arcs a , b_n , c_n et d_n suivants :



(i) l'arc a part du point A , intersection de $C(0, r)$ avec la demi-droite issue de 1 faisant avec l'axe des abscisses un angle β . Il parcourt $C(0, r)$ dans le sens positif jusqu'au point B , symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

(ii) L'arc b_n part de B et rejoint $C(1, \frac{1}{n})$ le long du segment $[B, 1]$.

(iii) L'arc c_n parcourt $C(1, \frac{1}{n})$ dans le sens négatif jusqu'au point d'intersection de $C(1, \frac{1}{n})$ et du segment $[1, A]$, dont l'abscisse est $1 + \frac{1}{n}e^{i\beta}$.

(iv) L'arc d_n part de l'extrémité de c_n et rejoint A le long du segment $[1, A]$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, [z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$.

3.4) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \oint_a \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{A}{R^n}$.

[Réponse : $\left| \oint_a \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \max_a |f| \oint_a \frac{du}{|u|^{n+1}} \leq \frac{2\pi r}{r^{n+1}} \max_a |f| \leq \frac{\max_a |f|}{R^n}$]

3.5) On suppose que $f(z) = O_1(1 - z)^\alpha$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de 1 dans $\mathbb{C}$, un nombre réel strictement positif M tel que

$$\forall z \in V \cap \mathcal{U}, |f(z)| \leq M|(1 - z)^\alpha|.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $B > 0$ tels que $\forall n \geq N, \left| \oint_{c_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{B}{n^{\alpha+1}}$ (on pourra se rappeler que la suite de terme général $(1 - \frac{1}{n})^n$ converge).

[Réponse : si N est assez grand pour que $\text{Supp}(c_n) \subseteq V$ pour tout $n \geq N$, alors $\oint_{c_n} \left| \frac{f(u)}{u^{n+1}} \right| du \leq M \oint_{c_n} \frac{|1-u|^\alpha}{|u|^{n+1}} du \leq M \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n+1}} \oint_{c_n} du \leq \frac{B}{n^{\alpha+1}}$ où $B > 0$ puisque la suite $((1 - \frac{1}{n})^n)_n$, qui converge vers $1/e$, est minorée par un réel strictement positif.]

3.6) Montrer que $|1 + \frac{t}{n} e^{i\beta}| \geq 1 + \frac{t}{n} \cos \beta$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En admettant¹ que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n} \cos \beta\right)^{-(n+1)} t^\alpha dt = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t \cos \beta} dt,$$

en déduire que, si r est choisi de sorte que $\text{Supp}(d_n) \subset V$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| \oint_{d_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{C}{n^{\alpha+1}}.$$

[Réponse. On paramètre le segment et on majore : $\left| \oint_{d_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{f(1+\frac{t}{n} e^{i\beta})}{(1+\frac{t}{n} e^{i\beta})^{n+1}} \frac{e^{i\beta}}{n} \right| dt$. Si $n \geq N$ et si r est choisi de sorte que $\text{Supp}(d_n) \subset V$, alors $\left| \oint_{d_n} \frac{f(u)}{u^{n+1}} du \right| \leq \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha \left|1 + \frac{t}{n} e^{i\beta}\right|^{-n-1} dt \leq \frac{C}{n^{\alpha+1}}$ grâce à la minoration débile et à ce qu'on admet.]

3.7) Rassembler les résultats des questions précédentes pour démontrer le théorème de transfert suivant :

$$\text{si } f(z) = O_1(1-z)^\alpha, \text{ alors } [z^n]f(z) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

[Réponse. L'intégrale sur le segment b_n se majore comme celle sur d_n . Puisque $R^{-n} = O(1/n^{\alpha+1})$, l'intégrale sur γ_n est la somme de quatre $O(1/n^{\alpha+1})$. C'est fini.]

¹C'est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Contrôle continu, épreuve de rattrapage (une heure)

1 Question de cours

Donner un exemple de fonction holomorphe présentant une singularité essentielle.

2 Exercice

Soit $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$, où la notation $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z . Pour tout $z \in \mathcal{P}$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1)$$

2.1) Démontrer que la fonction Γ est bien définie par la formule (1), qu'elle est holomorphe sur $\mathcal{P}$, et que

$$\forall z \in \mathcal{P}, \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t dt.$$

2.2) Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x ,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Cette formule est-elle encore vraie pour tout $x \in \mathcal{P}$?

2.3) On note $\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > -1\}$. Montrer comment la formule du **2.2)** permet de prolonger la fonction Γ en une fonction analytique sur $\mathcal{Q} \setminus \{0\}$.

2.4) Quel type de singularité la fonction Γ ainsi prolongée présente-t-elle au point 0 ?

2.5) On note $A = \frac{1}{2}(1-i)$, $B = \bar{A}$, $C = -A$ et $D = -\bar{A}$. Soit $\mathcal{C} = ABCD$ le carré parcouru une fois dans cet ordre. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \Gamma(z) dz.$$

Examen (deux heures)

1 Primitives (3 points)

- 1.1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ a-t-elle une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$?
- 1.2) La fonction $z \mapsto \frac{1}{2z+1}$ a-t-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$?
- 1.3) La fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{(x-\pi)^2}$ a-t-elle une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$?
- 1.4) La fonction $z \mapsto \frac{\cos z}{(z-\pi)^2}$ a-t-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{\pi\}$?

2 Cotangente et Zeta des entiers pairs (points)

Si z est un nombre complexe, on note $\cot(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ la cotangente de z .

- 2.1) Dire pourquoi la fonction $f : z \mapsto \pi \cot(\pi z)$ est méromorphe et 1-périodique sur $\mathbb{C}$. Donner l'ensemble de ses pôles avec leurs multiplicités.
- 2.2) Calculer le résidu de f en 0.
- 2.3) Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) - \frac{1}{z}$ est holomorphe en 0.
- 2.4) Montrer que la série

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

- 2.5) En considérant les sommes partielles de la série de définition de g , montrer que g est 1-périodique.
- 2.6) En utilisant la périodicité de f et de g , montrer que $f - g$ est une fonction entière.
- 2.7) Soient $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| \leq 1\}$ et $\mathcal{R} = \mathcal{B} \cap \{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$. Dessiner $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$. Montrer que la fonction $f - g$ est bornée sur $\mathcal{R}$. En déduire, par périodicité, que $f - g$ est bornée sur $\mathcal{B}$.
- 2.8) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, f(z) = i\pi \left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi z} - 1} \right).$$

En déduire que f est bornée sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$.

- 2.9) On admet¹ que la fonction g est également bornée sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$. Montrer que la fonction $f - g$ est constante et en déduire la formule d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

¹Pas si simple !

2.10) Pour tout entier $m \geq 2$, on note

$$\zeta(m) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^m}.$$

Pour tout entier non nul n , développer $\frac{z^2}{z^2 - n^2}$ en série entière au voisinage de l'origine. En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \implies \pi z \cot(\pi z) = 1 - 2 \sum_{m \geq 1} \zeta(2m) z^{2m}.$$

2.11) Indiquer une méthode de calcul qui permet de montrer que le début du développement de Taylor de $\pi z \cot(\pi z) = \frac{\pi z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ à l'origine est

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 - \frac{\pi^4}{45} z^4 - \frac{2\pi^6}{945} z^6 - \frac{\pi^8}{4725} z^8 + \dots$$

2.12) Calculer les nombres $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^8}$ sous la forme d'un nombre rationnel multiplié par une puissance de π .

Examen du 19 juin 2018, session 2 : des réponses

1 Primitives (6 points)

1.1) Par exemple $\frac{1}{2} \ln(2x+1)$.

1.2) Non car l'intégrale le long du cercle unité direct centré en $-1/2$ de $\frac{1}{2z+1}$ vaut $2i\pi$.

1.3) Oui parce qu'elle est continue.

1.4) Oui car son résidu en son unique pôle, qui est π , vaut 0. Cela se voit sur le DSL(π) de la fonction qui commence par

$$\frac{\cos \pi - (z - \pi) \sin \pi - \frac{1}{2}(z - \pi)^2 \cos \pi + \frac{1}{6}(z - \pi)^3 \sin \pi + \dots}{(z - \pi)^2} = \frac{-1}{(z - \pi)^2} + \frac{1}{2} + \dots$$

2 Cotangente et Zeta des entiers pairs (14 points)

2.1) C'est le quotient de deux fonctions holomorphes. Périodicité : $f(z+1) = \frac{\cos(\pi z + \pi)}{\sin(\pi z + \pi)} = \frac{-\cos(\pi z)}{-\sin(\pi z)} = f(z)$.
Pôles : $\mathbb{Z}$, tous simples (ce sont les zéros de $z \mapsto \sin \pi z$).

2.2) Le résidu de f en 0 est 1 (par exemple, $\lim_0 z f(z) = 1$).

2.3) Le DSL(0) de $z \mapsto f(z) - \frac{1}{z}$ n'a que des puissances positives ou nulles.

2.4) La convergence de la série est absolue en chaque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, normale sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. En effet, si K est un compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, soit $R > 0$ tels que $K \subseteq \{z, |z| \leq R\}$. Alors, si $n > R$,

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right| = \frac{|2z|}{|z^2 - n^2|} \leq \frac{2R}{n^2 - R^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente (les premiers termes, en nombre fini, on s'en fout).

2.5) $g(z+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z+1-n} + \frac{1}{z+1+n} \right) \right)$. On calcule : $\frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z+1-n} + \frac{1}{z+1+n} \right) = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{z-n} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) + \frac{1}{z-N} + \frac{1}{z+N} + \frac{1}{z-N-1} + \frac{1}{z+N+1}$ qui tend vers $g(z)$ lorsque N tend vers l'infini.

2.6) De pôles de $f - g$ dans la bande $\{z, -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\}$, il n'y en a pas à cause de la question 2.3). Donc $f - g$ est holomorphe dans ladite bande. Comme elle est 1-périodique, elle est entière.

2.7) Zut pour les dessins. Puisque $\mathcal{R}$ est compact et $f - g$ continue (elle est holomorphe), elle est bornée sur $\mathcal{R}$. Si $z \in \mathcal{B}$, il existe un entier m tel que $z + m \in \mathcal{R}$. Alors, $|(f - g)(z)| = |(f - g)(z + m)| \leq \max_{\mathcal{R}} |f - g|$.

2.8) D'abord,

$$f(z) = i\pi \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\pi \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} = i\pi \left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi z} - 1} \right).$$

Si $\Im z \geq 1$, alors

$$|e^{2i\pi z} - 1| \geq 1 - |e^{2i\pi z}| = 1 - e^{-2\pi \Im z} \geq 1 - e^{-2\pi} > 0.$$

Donc f est bornée sur $\{z, \Im z \geq 1\}$. Comme f est impaire, elle est bornée sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$ tout entier.

2.9) f et g sont bornées sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$. Donc $f - g$ est bornée sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$. Par ailleurs, $f - g$ est bornée sur $\mathcal{B}$ (question 2.7)). Donc $f - g$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Comme elle est entière, Liouville assure qu'elle est constante, égale à $(f - g)(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (f(z) - \frac{1}{z}) = 0$ d'après 2.3) (0 est pôle simple de f).

2.10) Pour tout z dont le module est $< n$,

$$\frac{z^2}{z^2 - n^2} = 1 + \frac{n^2}{z^2 - n^2} = 1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} = - \sum_{m \geq 1} \left(\frac{z}{n}\right)^{2m}$$

On développe : si $|z| < 1$,

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2z^2}{z^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \left(\frac{z}{n}\right)^{2m} = 1 - 2 \sum_{m \geq 1} z^{2m} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2m}} = 1 - 2 \sum_{m \geq 1} \zeta(2m) z^{2m}.$$

L'interversion de la troisième égalité est valide par Fubini (Tonelli puis tout court) sur tout disque fermé $\{z, |z| \leq r\}$ pour $0 \leq r < 1$, puisque, sur un tel disque, $\left|\frac{z}{n}\right|^{2m} \leq \left(\frac{r}{n}\right)^{2m}$ qui est positif et sommable en (n, m) (la somme vaut $\pi r \cot(\pi r)$).

2.11) Puisque $\pi z \cot(\pi z) = \frac{\cos \pi z}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}}$, on peut par exemple diviser $\cos \pi z$ par $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ selon les puissances croissantes.

2.12) Le nombre $-2\zeta(2m)$ est le coefficient de z^{2m} dans le développement de Taylor de $\pi z \cot(\pi z)$. Les premiers termes : $-2\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{3}$, d'où $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. De même, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ et $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$.

Examen partiel (une heure et demie)

1 Question de cours (4-5 points)

- 1.1) Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme complexe ?
- 1.2) On note Log la détermination principale du logarithme. Calculer $\text{Log}(-1-i)$ et $\text{Log}[(-1-i)^2]$. Commenter.
- 1.3) Trouver une détermination continue du logarithme, que l'on notera $\log$, pour laquelle

$$\log[(-1-i)^2] = 2\log(-1-i).$$

2 Exercice 1 (7-8 points)

On pourra admettre les deux résultats suivants de topologie élémentaire :

- (i) le cercle unité du plan complexe est un compact (pour la topologie usuelle) ;
(ii) une partie discrète d'un espace métrique compact est nécessairement finie.

On note S^1 le cercle unité du plan complexe, et $C = \{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Dans tout le problème, $a \in S^1$ et $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que

$$\forall z \in C, f(az) = f(z).$$

- 2.1) Montrer que $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini si, et seulement si a est une racine de l'unité.
- 2.2) Montrer que la suite $(f(a^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- 2.3) Montrer que si a n'est pas une racine de l'unité, alors f est constante sur C .
- 2.4) Le résultat subsiste-t-il si a est une racine de l'unité différente de 1 ?

3 Exercice 2 (7-8 points)

Soient f une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, a et b deux nombres complexes et R un réel strictement positif. On note γ_R un arc paramétré constitué du cercle de centre 0 et de rayon R , parcouru une fois dans le sens direct.

3.1) Question de cours : lorsque $|a| < R$, calculer $\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

3.2) On suppose que a et b sont deux complexes distincts du disque ouvert de centre 0 et de rayon R . Calculer

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

(on pourra penser à décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ en éléments simples).

3.3) On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que dans ces conditions,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0.$$

3.4) En rassemblant les deux questions précédentes, démontrer le théorème de Liouville : si f est à la fois holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée, alors f est constante.

Corrigé succinct du partiel

1 Question de cours

1.3) Par exemple, la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et valant $-i\pi$ en -1 , notée ici $\log$, convient. Elle est définie par $\log z = \ln |z| + i \arg z$ où $\arg z \in]-2\pi, 0[$ est un argument de z . Alors, $\log(-1-i) = \log(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}) = \ln \sqrt{2} - \frac{3i\pi}{4}$ et $\log((-1-i)^2) = \log(2i) = \log 2e^{-3i\pi/2} = \ln 2 - \frac{3i\pi}{2} = 2 \log(-1-i)$.

2 Exercice

2.1) Si a est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, alors $\{a^n, n \in \mathbb{N}\} = \{a^n, 0 \leq n \leq m-1\}$ est fini. Inversement, si $\{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini, soient n et m tels que $a^n = a^{n+m}$. Comme $a \neq 0$, cela entraîne que $a^m = 1$, *i.e.* que a est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

2.2) On montre par récurrence que $f(a^n) = f(1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est idiot si $n = 0$. Si $n \geq 0$, et si $f(a^n) = f(1)$, alors l'équation fonctionnelle de f implique que $f(a^{n+1}) = f(a \times a^n) = f(a^n) = f(1)$, ce qu'il fallait démontrer.

2.3) Soit g la fonction définie sur C par $g(z) = f(z) - f(1)$. Elle est évidemment holomorphe. Si a n'est pas une racine de l'unité, alors $Z = \{a^n, n \in \mathbb{N}\}$, qui est une partie infinie du compact S^1 , admet au moins un point d'accumulation (rappel de topologie en tête de l'énoncé). Dans ces conditions, l'ensemble des zéros de g , qui contient Z , n'est pas discret. Grâce au théorème des zéros isolés, on en déduit, puisque C est (visiblement) connexe, que g est nulle sur C . Autrement dit, f est constante sur C .

2.4) Si a est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, la fonction $z \mapsto z^m$ est holomorphe sur C , vérifie l'équation fonctionnelle et n'est pas constante. La réponse est non.

3 Exercice

Soient f une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, a et b deux nombres complexes et R un réel strictement positif. On note γ_R un arc paramétré constitué du cercle de centre 0 et de rayon R , parcouru une fois dans le sens direct.

3.1)
$$\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi f(a) \text{ (formule de Cauchy).}$$

3.2)
$$\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{a-b} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-b} dz \right) = 2i\pi \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

3.3) Puisque $|f| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, dès que $R > \max\{|a|, |b|\}$, on a la majoration

$$\left| \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \right| \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}.$$

Par conséquent,

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leq \frac{2\pi RM}{(R-|a|)(R-|b|)} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

3.4) Soient a et b dans $\mathbb{C}$, distincts. Pour tout $R > \max\{|a|, |b|\}$, on a

$$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Par passage à la limite lorsque R tend vers $+\infty$, cela montre que $f(a) = f(b)$. Comme cela vaut pour tous a et b de $\mathbb{C}$, on a montré que f est constante sur $\mathbb{C}$.

Examen (deux heures)

1 Questions de cours et résidus (7 points)

- 1.1) Énoncer la formule des résidus (on apportera un soin particulier à l'énoncé des hypothèses).
 1.2) Calculer le résidu en i de la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.
 1.3) Montrer que si la partie imaginaire d'un nombre complexe z est positive ou nulle, alors $|e^{iz}| \leq 1$.
 1.4) Si $R > 1$, on note $\gamma_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ l'arc paramétré défini par

$$\forall t \in [0, 1], \gamma_R(t) = Re^{i\pi t}.$$

Dessiner le support de γ_R et montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 0.$$

- 1.5) Dire rapidement pourquoi la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}.$$

2 Petit Picard (7 points)

Si w est un nombre complexe, $\Im w$ désigne sa partie imaginaire.

- 2.1) Montrer que $|z - i|^2 = |z + i|^2 - 4\Im z$, pour tout nombre complexe z .
 2.2) Soient $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}$ et h l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}$$

Dessiner $\mathbb{H}$ et montrer que $|h(z)| < 1$, pour tout $z \in \mathbb{H}$.

- 2.3) Soient E , F et G trois ensembles et $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que

$$(v \text{ injective et } v \circ u \text{ constante}) \implies (u \text{ constante}).$$

- 2.4) Montrer qu'une fonction analytique $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ est nécessairement constante.
 2.5) On admet l'existence d'une fonction holomorphe et injective

$$\mu : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{H}$$

(l'existence d'une telle fonction n'est pas élémentaire¹). Montrer que toute fonction entière dont l'image est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est nécessairement constante.

¹L'inverse d'une fonction célèbre, appelée *modulaire*, fournit un tel exemple.

2.6) Soient a et b deux nombres complexes distincts. Expliciter une bijection holomorphe

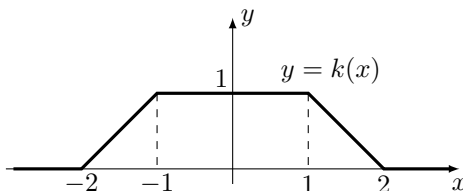
$$A : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$$

dont la réciproque soit holomorphe (on pourra chercher parmi les applications polynomiales de degré 1).

2.7) Rassembler les résultats précédents pour démontrer le petit théorème de Picard qui s'énonce ainsi : *l'image d'une fonction entière non constante est le plan complexe tout entier ou le plan complexe privé d'un point.*

3 Constance et intégrité (6 points)

Soit $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue et affine par morceaux dont le graphe est représenté ci-dessous.



Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = k(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit enfin $V = \{z \in \mathbb{C}, \Re z < 0\}$, où $\Re z$ désigne la partie réelle du nombre complexe z .

On pourra utiliser le résultat de topologie suivant : *toute partie non vide, connexe et discrète de $\mathbb{C}$ est réduite à un point.*

3.1) Montrer que l'image de la fonction $h : V \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto h(z) = \exp(z)$ est contenue dans le disque unité ouvert.

3.2) Soient $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On suppose que $\mathcal{U}$ contient l'image de H (pour pouvoir définir $F \circ H$). Montrer, en utilisant par exemple f et h , que l'implication

$$(F \text{ continue et } F \circ H \text{ constante}) \implies (F \text{ constante ou } H \text{ constante})$$

est fausse.

3.3) Soient F une fonction holomorphe et non constante sur un ouvert connexe $\mathcal{U}$ et a un nombre complexe. Justifier brièvement que l'ensemble $F^{-1}(a) = \{z \in \mathcal{U}, F(z) = a\}$ est une partie discrète de $\mathcal{U}$.

3.4) Soient $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On suppose que $\mathcal{U}$ contient l'image de H (pour pouvoir définir $F \circ H$). L'implication

$$(F \text{ holomorphe et } F \circ H \text{ constante}) \implies (F \text{ constante ou } H \text{ constante})$$

est-elle vraie ?

Corrigé succinct de l'examen

1 Question de cours

1.1) OK.

1.2) C'est un quotient de deux fonctions holomorphes f/g , le dénominateur g ayant en i un zéro simple. Le résidu demandé est alors $f(i)/g'(i) = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie}$.

1.3) Si x et y sont réels, $|e^{i(x+iy)}| = e^{-y} \leq 1$, l'inégalité étant valide dès que $y \geq 0$.

1.4) C'est le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan supérieur. Si $z \in \gamma_R$, on est dans les hypothèses de la question précédente ; ainsi, $\left| \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{R^2-1}$. On en déduit, puisque la longueur de γ_R est πR , que

$$\left| \oint_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

1.5) Si $t \in \mathbb{R}$, alors $\left| \frac{\cos t}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est vrai également de $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$. On utilise le fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{\cos t}{1+t^2} dt$$

et la question précédente pour passer à la limite $R \rightarrow +\infty$ dans la formule des résidus appliquée à $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ sur l'arc δ_R formé de γ_R suivi du segment $[-R, R]$. C'est un lacet simple et direct si bien que, puisque $R > 1$, l'indice de ce lacet par rapport à i est 1 (s'il faut, se faire un dessin pour s'en convaincre). On voit immédiatement que i est le seul pôle de l'intégrand dans le domaine délimité par le lacet. En utilisant la question 1.2), la formule des résidus donne alors

$$\oint_{\delta_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{\cos t}{1+t^2} dt + \oint_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{2i\pi}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

L'égalité cherchée en résulte comme annoncé, en passant à la limite $R \rightarrow +\infty$.

2 Le petit Picard

2.1) $|z-i|^2 - |z+i|^2 = -2\Re(\bar{iz}) - 2\Re(\bar{iz}) = -4\Im z$.

2.2) Pour le dessin : $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur. Pour le calcul, $|h(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = 1 - \frac{4\Im z}{|z+i|^2}$, ce qui entraîne que $|h(z)| < 1$ dès que $\Im z > 0$.

2.3) Si u n'est pas constante, soient $x, y \in E$ tels que $u(x) \neq u(y)$. Alors, puisque v est injective, $v \circ u(x) \neq v \circ u(y)$. Donc $v \circ u$ n'est pas constante. On a montré l'implication contraposée.

2.4) Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$, analytique. Alors, g est entière, et, puisque h est holomorphe (c'est une fraction rationnelle), $h \circ g$ est une fonction entière. D'après la question précédente, $h \circ g$ est aussi bornée

$$\mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{H} \xrightarrow{h} \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}.$$

On lui applique le théorème de Liouville : $h \circ g$ est constante. Or, h est injective (c'est une homographie : $h(z) = w$ équivaut à $z = i \frac{1+w}{1-w}$, qui montre que h est une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{1\}$). Par conséquent, g est constante également : la réponse est oui.

2.5) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière dont l'image est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On peut alors la composer par μ :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \xrightarrow{\mu} \mathbb{H}.$$

La fonction $\mu \circ f$ est une fonction entière dont l'image est dans $\mathbb{H}$. D'après la question précédente, $\mu \circ f$ est constante. Comme μ est injective, f est aussi constante.

2.6) $A : z \mapsto (b - a)z + a$ convient ; sa réciproque est $A^{-1} : z \mapsto \frac{z-a}{b-a}$.

2.7) On suppose que φ est une fonction entière qui évite deux points distincts a et b . Alors, $A^{-1} \circ \varphi$ est une fonction entière à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \xrightarrow{A^{-1}} \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

D'après la question qui précède la précédente, $A^{-1} \circ \varphi$ est donc constante. Comme A^{-1} est injective, φ est donc elle-même constante.

3 Constance et intégrité

3.1) Soit $z \in V$ et $x = \Re z$. Alors, $|h(z)| = \exp(x) < 1$, puisque $x < 0$.

3.2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ répondent aux hypothèses. En outre, f est continue puisque k et $z \mapsto |z|$ le sont. Puisque l'image de h est contenue dans le disque unité ouvert, la définition de f entraîne que $f \circ h$ est la fonction constante égale à 1. Pourtant, ni f ni h ne sont constantes : l'implication est fausse.

3.3) La fonction $F - a$ est holomorphe et non constante, comme F . Ses zéros, qui sont les points de $F^{-1}(a)$, sont donc isolés. [Ou bien : par l'absurde et par prolongement analytique sur $\mathcal{U}$ ouvert connexe.]

3.4) On suppose F holomorphe non constante, et $F \circ H$ constante égale à a . L'image de H est donc contenue dans l'ensemble discret $F^{-1}(a)$. Puisque $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et puisque $\mathcal{V}$ est connexe, l'image de H est aussi connexe (théorème des valeurs intermédiaires). Cette image est donc à la fois connexe, discrète et non vide : elle est réduite à un point, ce qui signifie que H est constante. [Ou bien : théorème de l'application ouverte appliqué à H qui est holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{V}$.] La réponse est oui.

Contrôle continu : épreuve de remplacement

1 Question de cours

Énoncer avec soin le principe du module maximum pour les fonctions holomorphes.

2 Problème

Soient U un ouvert du plan complexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe.

1) On définit la fonction $\varphi : U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que si $a \in U$, alors pour tout (x, y) au voisinage de (a, a) dans U ,

$$\varphi(x, y) = \varphi(a, a) + \int_0^1 (f'(u(t)) - f'(a)) dt$$

où $u(t)$ désigne le nombre complexe $u(t) = (1 - t)x + ty$.

2) Dédurre de la question précédente que φ est continue sur $U \times U$.

3) Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que $a \in U$ est tel que $f'(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de a dans U tel que

$$\forall (x, y) \in V \times V, \quad |\varphi(x, y) - \varphi(a, a)| \leq \frac{1}{2} |\varphi(a, a)|$$

4) Montrer que $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2} |f'(a)| |x - y|$ pour tous x et y dans V .

5) Montrer que la restriction de f à V est injective.

6) Montrer que $f(V)$ est ouvert (on pourra appliquer le principe du module minimum à une fonction holomorphe bien choisie).

7) Démontrer que la réciproque de l'application holomorphe bijective

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & f(V) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est également holomorphe.

Examen (deux heures)

1 Questions de cours (8 points)

1.1) La formule

$$\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$$

est vraie pour tout $x \in [0, 2\pi]$ (on ne demande pas de démontrer cela). L'est-elle pour tout $x \in \mathbb{C}$?

1.2) Comment s'énonce le théorème de Laurent pour une fonction méromorphe ?

1.3) Calculer les zéros, les pôles et les résidus (avec leurs multiplicités) de la fonction

$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z + 5}{(z+2)(z^2+1)}.$$

1.4) Développer en série de Laurent en 0 la fonction f dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$.

2 Un invariant à la Tutte (12 points)

Préambule

(i) Si f et g sont deux fonctions complexes de la variable complexe, on dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de l'infini et on note $f \sim_{\infty} g$ lorsque $f(z)/g(z)$ tend vers 1 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Ainsi, par définition,

$$f \sim_{\infty} g \iff \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

(ii) Si U et V sont deux ouverts du plan et si $f : U \rightarrow V$ est une application, on dit que f est un *isomorphisme analytique* lorsque f est holomorphe, bijective, et lorsque sa réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$ est également holomorphe. On pourra utiliser le résultat suivant (vu en TD) : *une application holomorphe et bijective est un isomorphisme analytique*.

(iii) Une *fraction rationnelle* est, par définition, un quotient de deux fonctions polynomiales.

2.1) Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) \sim_{\infty} z^N$.

(i) On note T le polynôme de Taylor à l'ordre N de f à l'origine. Ecrire $T(z)$ en fonction de z et des dérivées successives de f en 0.

(ii) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{f(z) - T(z)}{z^{N+1}}$ est entière et bornée.

(iii) En déduire que f est polynomiale.

2.2) Soit F une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que F n'a qu'un nombre fini de pôles et qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{Z}$ tels que $F(z) \sim_{\infty} Cz^N$.

(i) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $z \mapsto P(z)F(z)$ soit une fonction entière.

(ii) En déduire que F est une fraction rationnelle.

2.3) Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ et $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par la formule

$$I(z) = z + \frac{1}{z}.$$

(i) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $w \in \mathbb{C}$ tels que $I(z) = w$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$I(x) = w \iff x \in \left\{ z, \frac{1}{z} \right\}.$$

(ii) En déduire que I est injective sur D .

2.4) On note S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$. Montrer que $I(S^1) = [-2, 2]$ et que $I(D) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

2.5) Montrer que la restriction de I à D est un isomorphisme analytique entre D et $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. On note $J : \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \rightarrow D$ la réciproque de cet isomorphisme analytique (autrement dit, $J = (I|_D)^{-1}$).

2.6) Soit $M \in [2, +\infty[$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\left(z \in D \text{ et } |I(z)| \geq M \right) \implies \left(|z| \leq \frac{1}{M-1} \right).$$

En déduire que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} J(z) = 0$, puis que $J(z) \sim_{\infty} \frac{1}{z}$.

2.7) Soit F une fraction rationnelle à coefficients complexes telle que $F(X) = F(1/X)$. On admet que $F \circ J$ est alors une fonction méromorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles¹.

(i) Montrer qu'il existe une fraction rationnelle G telle que

$$\forall z \in D, F(z) = G\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (1)$$

(ii) L'égalité (1) est-elle vraie pour tous les nombres complexes z qui ne sont pas des pôles de F ?

¹C'est une conséquence du théorème de Morera, par exemple.

Examen (deux heures)

1 Questions de cours (8 points)

1.1) La formule

$$\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$$

est vraie pour tout $x \in [0, 2\pi]$ (on ne demande pas de démontrer cela). L'est-elle pour tout $x \in \mathbb{C}$?

Réponse : oui, prolongement analytique.

1.2) Comment s'énonce le théorème de Laurent pour une fonction méromorphe ?

1.3) Calculer les zéros, les pôles et les résidus (avec leurs multiplicités) de la fonction

$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z + 5}{(z + 2)(z^2 + 1)}.$$

Réponse : pôles $-2, \pm i$ et zéros $-\frac{1}{2} \pm i\frac{3}{2}$, tous simples.

1.4) Développer en série de Laurent en 0 la fonction f dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$.

Réponse : $f(z) = \frac{9}{5} \frac{1}{z+2} + \frac{1}{5} \frac{z+8}{z^2+1} = \frac{9}{10} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{5z} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} + \frac{8}{5z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$ D'où, dans la couronne,

$$f(z) = \frac{9}{10} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}} + \frac{8}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}}.$$

2 Un invariant à la Tutte (12 points)

Préambule

(i) Si f et g sont deux fonctions complexes de la variable complexe, on dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de l'infini et on note $f \sim_{\infty} g$ lorsque $f(z)/g(z)$ tend vers 1 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. Ainsi, par définition,

$$f \sim_{\infty} g \iff \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

(ii) Si U et V sont deux ouverts du plan et si $f : U \rightarrow V$ est une application, on dit que f est un *isomorphisme analytique* lorsque f est holomorphe, bijective, et lorsque sa réciproque $f^{-1} : V \rightarrow U$ est également holomorphe. On pourra utiliser le résultat suivant (vu en TD) : *une application holomorphe et bijective est un isomorphisme analytique*.

(iii) Une *fraction rationnelle* est, par définition, un quotient de deux fonctions polynomiales.

2.1) Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) \sim_{\infty} z^N$.

(i) On note T le polynôme de Taylor à l'ordre N de f à l'origine. Ecrire $T(z)$ en fonction de z et des dérivées successives de f en 0.

(ii) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{f(z) - T(z)}{z^{N+1}}$ est entière et bornée.

Réponse : On note g cette fonction. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Au voisinage de zéro, $g(z) = \sum_{n \geq N+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-N-1}$ qui est une série de rayon infini. Donc g est entière.

Par hypothèse, $f(z)/z^{N+1} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$. Le polynôme T est de degré $\leq N$, donc $T(z)/z^{N+1} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$. Ainsi, $g(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$. Puisque g est continue sur $\mathbb{C}$, on en déduit qu'elle est bornée.

(iii) En déduire que f est polynomiale.

Réponse : Par Liouville, g est constante. Donc $f(z) = T(z) + z^{N+1}g(z)$ est polynomiale.

2.2) Soit F une fonction méromorphe. On suppose que F n'a qu'un nombre fini de pôles et qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{Z}$ tels que $F(z) \sim_{\infty} Cz^N$.

(i) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $z \mapsto P(z)F(z)$ soit une fonction entière.

Réponse : Puisque F est méromorphe, tous ses points singuliers sont des pôles. Puisqu'ils sont en nombres finis, soit P le polynôme $P(z) = \prod (z-p)^c$ le produit portant sur tous les pôles p , dont c est la multiplicité. Alors, fP est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle : elle est entière.

(ii) En déduire que F est une fraction rationnelle.

2.3) Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ et $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par la formule

$$I(z) = z + \frac{1}{z}.$$

(i) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $w \in \mathbb{C}$ tels que $I(z) = w$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$I(x) = w \iff x \in \left\{ z, \frac{1}{z} \right\}.$$

(ii) En déduire que I est injective sur D .

2.4) On note S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$. Montrer que $I(S^1) = [-2, 2]$ et que $I(D) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

2.5) Montrer que la restriction de I à D est un isomorphisme analytique entre D et $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. On note $J : \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \rightarrow D$ la réciproque de cet isomorphisme analytique (autrement dit, $J = (I|_D)^{-1}$).

2.6) Soit $M \in [2, +\infty[$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\left(z \in D \text{ et } |I(z)| \geq M \right) \implies \left(|z| \leq \frac{1}{M-1} \right).$$

En déduire que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} J(z) = 0$, puis que $J(z) \sim_{\infty} \frac{1}{z}$.

2.7) Soit F une fraction rationnelle à coefficients complexes telle que $F(X) = F(1/X)$. On admet que $F \circ J$ est alors une fonction méromorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles¹.

(i) Montrer qu'il existe une fraction rationnelle G telle que

$$\forall z \in D, F(z) = G\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (1)$$

(ii) L'égalité (1) est-elle vraie pour tous les nombres complexes z qui ne sont pas des pôles de F ?

¹C'est une conséquence du théorème de Morera, par exemple.