UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 9 : un anneau principal non euclidien

Dans tout l'exercice, on note $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$, sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par α.

1) Trouver un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients entiers annulé par α.

2) Montrer que A est isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}[X]$.

3) Pour tout $z \in A$, on note[♪] $N(z) = |z|^2$. Lorsque $z = x + \alpha y \in A$ où x et y sont entiers, calculer $N(z)$ en fonction de x et y. En déduire que le groupe des inversibles de A est $A^\times = \{\pm 1\}$.

4) Montrer que pour tous $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$, il existe q et r dans A tels que

(i) $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$;

(ii) $N(r) \leq N(b) - 1$.

[Indications. Ecrire $x = a/b$ sous la forme $u + \alpha v$ où u et v sont rationnels. Noter respectivement s et t les entiers les plus proches de u et v (discuter leur choix éventuel) et $q = s + \alpha t$. Montrer que si v n'est pas dans un intervalle de la forme $]n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}[$ où $n \in \mathbb{Z}$, alors q et $r = a - bq$ répondent au problème. Se ramener à cette situation en remplaçant x par $2x$ lorsque la distance de v à $\mathbb{Z}$ est strictement supérieure à $1/3$.]

5) Montrer que $2A$ est un idéal maximal de A.

6) Montrer que A est un anneau principal.

Indications. Prendre un idéal I de A et un élément non nul $a \in I$ de norme minimale. Supposer par l'absurde que $I \neq (a)$ et prendre $x \in I \setminus (a)$. Montrer que a divise nécessairement $2x$ et que cela entraîne, puisque l'idéal (2) est premier, que 2 divise a. Trouver une relation de Bézout entre 2 et le quotient $q = 2x/a \in A$, puis conclure à une contradiction en montrant que le quotient $a' = a/2 \in A$ est un élément non nul de I de norme strictement inférieure à celle de I.]

7) Un anneau (commutatif) A est dit *euclidien* lorsqu'il est intègre et lorsqu'il existe une application $\sigma : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que pour tous $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$, il existe q et r dans A tels que

(i) $a = bq + r$;

(ii) $r = 0$ ou $\sigma(r) \leq \sigma(b) - 1$.

Reconnaître l'application σ pour les célèbres anneaux euclidiens $\mathbb{Z}$ et $k[X]$ lorsque k est un corps. Démontrer que tout anneau euclidien est principal.

8) Montrer que si A est un anneau euclidien, il existe $x \in A \setminus A^\times$ tel que la restriction de la projection canonique $A \to A/(x)$ à $A^\times \cup \{0\}$ soit surjective. Montrer que dans ces conditions, l'idéal (x) est maximal.

9) Montrer que A n'est pas euclidien.

[Indication : s'il l'était, on aurait un homomorphisme surjectif de A dans un corps à 2 ou 3 éléments. En considérant l'image de α dans ce corps et l'équation polynomiale à coefficients entiers qu'elle satisfait, montrer qu'une telle situation est impossible.]

[Référence : Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.]

[♪] Au sens de l'arithmétique, l'entier $N(z)$ est appelé *norme* de z.