UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 4

1 Un peu d'arithmétique dans les anneaux factoriels

1.1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $a \wedge b$ le PGCD de a et b, et $a \vee b$ leur PPCM. Montrer que $ab = (a \wedge b) \times (a \vee b)$.

1.2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Calculer les facteurs invariants[♪] du groupe abélien fini $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$.

1.3) Soit $\mathcal{A}$ un anneau factoriel. Si I est un idéal de $\mathcal{A}$, le *radical* de I est l'ensemble

$$\sqrt{I} := \{x \in \mathcal{A},\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}.$$

(i) Montrer que si I est un idéal de $\mathcal{A}$, alors $\sqrt{I}$ est aussi un idéal de $\mathcal{A}$.

(ii) Calculer $\sqrt{(0)}$ et $\sqrt{\mathcal{A}}$.

(iii) Montrer que si $a \in \mathcal{A}$, alors l'idéal $\sqrt{(a)}$ est principal.

(iv) Soit $I = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et calculer son radical.

(v) Soit $J = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-1) = 0 \text{ et } P'(-1) = 0\}$. Montrer que J est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et calculer son radical.

1.4) (i) Trouver le PGCD et le PPCM de $X^4 - 1$ et de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(ii) Trouver tous les $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\left(X^4 - 1\right) P + \left(X^6 - 1\right) Q = X^3 + 2X^2 - X - 2. \tag{1}$$

(iii) Résoudre l'équation (1) dans $\mathbb{R}[X]$.

1.5) Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une racine de P, où p et q sont premiers entre eux. En déduire que $q | a_d$ et que $p | a_0$.

[Prolongement : montrer qu'en fait, $qX - p$ divise P dans $\mathbb{Z}[X]$. En déduire également que $p - q | P(1)$ et que $p + q | P(-1)$.]

1.6) Soient n un entier naturel non nul, et $P = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ si, et seulement si $n \geq 2$. Montrer aussi que P est irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ si, et seulement si $n \geq 3$.

1.7) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que le nombre rationnel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas un nombre entier.

[On pourra montrer que, si m est le PPCM de $1, 2, \ldots, n$ et si on écrit ce nombre rationnel sous la forme $\frac{a}{m}$ où $a \in \mathbb{N}$, alors a est impair ; on pourra pour cela s'aider du plus grand entier k tel que $2^k \leq n$ et considérer la parité des $\frac{m}{j}$ où $1 \leq j \leq n$.]

2 Produits d'idéaux

2.1) Soit $\mathcal{A}$ un anneau (commutatif unitaire). Si I et J sont des idéaux de $\mathcal{A}$, on note $I \cdot J$ (ou encore IJ) l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par $\{ij,\ i \in I,\ j \in J\}$. Montrer que $I \cdot J \subseteq I \cap J$ mais que l'inclusion est stricte en général.

2.2) Soient $\mathcal{A}$ un anneau et $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Montrer que $(a) \cdot (b) = (ab)$ et que $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad, bc, bd)$. Généraliser ce résultat.

2.3) Dans $\mathbb{Q}[X, Y]$, montrer que $(XY, X^2) = (X) \cap (X^2, Y) = (X) \cap (X, Y)^2$, où le "carré" $(X, Y)^2$ désigne le produit de l'idéal (X, Y) avec lui-même. Ce résultat subsiste-t-il dans $\mathbb{Z}[X, Y]$?

[♪] Voir le programme du LSMA410, intitulé "algèbre générale". Les *facteurs invariants* d'un groupe abélien fini G constituent l'unique suite finie d'entiers naturels $(a_1, \ldots, a_r)$ telle que $2 \leq a_1 | a_2 | \ldots | a_r$ et $G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$.