UVSQ 2021/2022
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 2

1 Divisions euclidiennes de polynômes

1.1) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4+X^3+3X^2+2X+2$ par $2X^3-5X^2+4X-10$, puis par $X^3-5X^2+4X-10$.

1.2) Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par :

$$\text{(i) } (X-3)(X-2) \qquad \text{(ii) } (X-2)^2 \qquad \text{(iii) } (X-3)^3$$

1.3) Soient $\mathcal{A}$ un anneau, $a \in \mathcal{A}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^m - a^m$ par $X^n - a^n$.

1.4) Soient a et b deux éléments distincts d'un corps $\mathbb{F}$. Soit $P \in \mathbb{F}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$, par $(X-a)^2$, par $(X-a)^3$.

1.5) Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2n+1}+X^{n+1}$ par X^2+X+1 dans $\mathbb{Z}[X]$.

1.6) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X,Y]$ et $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^2Y^3 - 2X^4 + Y^3 - XY + 2 = \left(Y^2 - X^3\right) Q(X,Y) + S(X)Y + T(X).$$

Quel est le degré en Y de Q ?

2 Anneaux finis

2.1) Donner des exemples d'anneaux finis non intègres.

2.2) Soit $\mathcal{A}$ un anneau (commutatif) intègre et fini. Montrer que si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, l'application $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto ax$ est injective. En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps.

3 Variations polynomiales

3.1) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = P'$.

3.2) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = XP'$.

3.3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

3.4) Soit p un nombre premier. Montrer que, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$,

$$X^{p-1} - 1 = \prod_{k=1}^{p-1} (X-k)\,. \tag{1}$$

En déduire le théorème de Wilson qui affirme que n *est premier si, et seulement si* $(n-1)! \equiv -1\ [n]$. [Essayer, avec une machine, de tester ce théorème sur les premiers entiers.]

[Indications. Les deux polynômes sont unitaires, de même degré et ont les mêmes racines qui sont les inversibles du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$. On peut aussi partir de l'identité du cours qui décompose $X^p - X$. Pour Wilson, si n est premier, spécialiser en $X = 0$; sinon, prendre un facteur de n : puisqu'il ne divise pas $(n-1)!+1$, c'est aussi vrai de n.]

3.5) Montrer que, si p est un nombre premier impair, le numérateur de la fraction réduite du rationnel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \tag{2}$$

est un multiple de p. [Là encore, essayer un peu avec une machine, pour voir : $\frac{3}{2}, \frac{25}{12}, \frac{49}{20}, \frac{7381}{2520}, \frac{86021}{27720}, \frac{2436559}{720720}$, *etc.*]

[Indications. Dériver l'identité polynomiale (1) et spécialiser. Conclure avec Gauss puisque p est étranger au dénominateur.]

3.6) Encore mieux : démontrer le théorème de Wolstenholme qui affirme que *si p est un nombre premier supérieur ou égal à 5, alors p^2 divise le numérateur de* (2).

[Indications. Considérer cette fois le polynôme $P = \prod_{k=1}^{p-1}(X-k)$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Tous ses coefficients du milieu sont divisibles par p. Ecrire $P(p) = (p-1)!$, simplifier par le terme constant, diviser par p. On montre ainsi que le numérateur de la fraction non réduite est de la forme $pa_2 + p^2 a_3 + \cdots + p^{p-2}$ où tous les a_k sont divisibles par p. Conclure encore avec Gauss.]

4 Polynômes et prolongement analytique

4.1) Si $\mathcal{A}$ est un anneau commutatif et si $P \in \mathcal{A}[X]$, on note $\widetilde{P} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'application polynomiale associée à P. On note aussi $\Phi : \mathcal{A}[X] \to \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, $P \mapsto \widetilde{P}$, où $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ désigne l'anneau des applications $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

(i) Peut-on trouver un exemple d'anneau $\mathcal{A}$ pour lequel Φ est injectif mais pas surjectif ?

(ii) Peut-on trouver un exemple d'anneau $\mathcal{A}$ pour lequel Φ est surjectif mais pas injectif ?

(iii) Peut-on trouver un exemple d'anneau $\mathcal{A}$ pour lequel Φ n'est ni injectif ni surjectif ?

(iv) Peut-on trouver un exemple d'anneau $\mathcal{A}$ pour lequel Φ est bijectif ?

4.2) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Calculer le degré de P_n. Calculer P_n, pour tout $n \leq 10$.