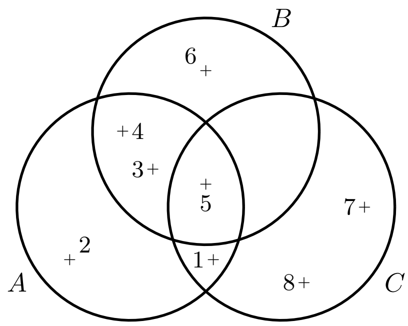
UVSQ 2023/2024
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA202 (algèbre linéaire I)

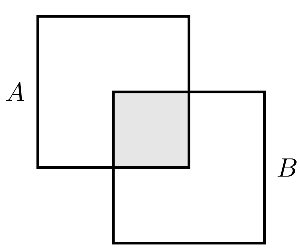
Feuille d'exercices numéro 1

1 Diagrammes de Venn

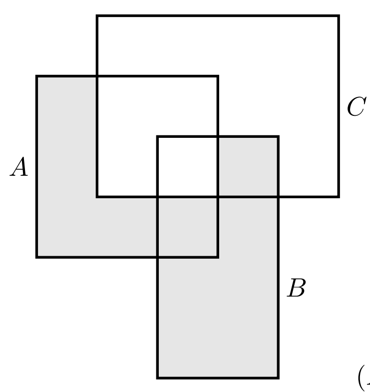
Un *diagramme de Venn* est un dessin permettant de représenter des ensembles (abstraits) et leurs éléments. Par exemple, le dessin qui suit est un diagramme de Venn associé aux ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ et $C = \{1, 5, 7, 8\}$:



D'une manière générale, un diagramme de Venn permettant de représenter des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comprend :
(i) une région pour chaque A_k, délimitée par une courbe fermée
[La région n'est pas forcément convexe ; dans l'exemple ci-dessus, les courbes sont des cercles, les régions sont les disques qui leurs correspondent.]
(ii) pour chaque élément e, un point se trouvant dans les régions associées aux A_k qui contiennent e et pas dans les autres.
Un diagramme de Venn général doit donc contenir des régions distinctes pour toutes les relations d'appartenance aux A_k possibles. Dans l'exemple ci-dessus où $n = 3$, on a dessiné 8 régions (l'extérieur est une région qui correspondrait aux éléments qui ne sont dans aucune des A_k). Dans le cas général, il y a 2^n régions dessinées.
Lorsqu'on omet de dessiner les éléments, un diagramme de Venn permet aussi de visualiser les unions ou les intersections d'ensembles. En voici deux exemples.



$A \cap B$



$(A \cup B) \setminus (A \cap C)$

Dessiner un diagramme de Venn qui illustre chacune des expressions ensemblistes suivantes.

(i) $A \cap B$ (ii) $A \setminus B$ (iii) $A \cup B$ (iv) $((A \cup B) \setminus A) \setminus B$ (v) $A \cap B \cap C$

(vi) $(A \cap B) \cup C$ (vii) $(A \cup B) \cap C$ (viii) $(A \cup B) \setminus C$ (ix) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

(x) $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)$ (xi) $A \cap B \cap C \cap D$♫.

♫Attention, il doit y avoir $2^4 = 16$ régions distinctes !

2 Des gammes ensemblistes

2.1) Soient A et B des ensembles. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $A \subseteq B$ (ii) $A \cap B = A$ (iii) $A \cup B = B$.

2.2) Soient X un ensemble, A et B deux parties de X.
(i) Est-il vrai que $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$?
(ii) Est-il vrai que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$?
(iii) Est-il vrai que $A \subseteq B \iff X \setminus B \subseteq X \setminus A$?

2.3) Soient A, B et C trois ensembles.
(i) Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et calculer $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.
(ii) Montrer que $A \Delta B = A \iff B = \emptyset$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \Delta B = \emptyset$.
(iii) Montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

3 Formule du crible

On ne discute pas l'assertion suivante, qui est intrinsèquement liée à la définition de la somme de deux entiers naturels :

si A et B sont des ensembles finis disjoints, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

3.1) Montrer que si A et B sont deux ensembles finis, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

3.2) Montrer que si A, B et C sont deux ensembles finis, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).$$

3.3) Soient X un ensemble, K un ensemble fini et $(A_k)_{k \in K}$ un famille de parties de X. Si $J \subseteq K$, on note $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$ si $J \neq \emptyset$. Montrer la *formule du crible*, par récurrence sur le cardinal de K :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) = \sum_{J \subseteq K,\ J \neq \emptyset} (-1)^{\mathrm{Card}(J)-1} \mathrm{Card}(A_J) = \sum_k \mathrm{Card}(A_k) - \sum_{\{k_1,k_2\}, k_1 \neq k_2} \mathrm{Card}(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \cdots$$

4 Des gammes sur les applications

4.1) Dans chacun des cas suivants, calculer l'image de f et dire si f est surjective, si elle est injective (et si elle est bijective).

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$ (ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ (iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(s, t) \mapsto 2s$

(iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $w \mapsto 2w$ (v) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $u \mapsto u^2$ (vi) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(n, d) \mapsto \frac{n}{d}$

4.2) Dans chacun des cas suivants, calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = [-3, 2]$, $B = [1, 2[$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w \mapsto 3w - 7$, $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $A = \mathbb{R} \times \{0\}$, $B = [1, 2]$

4.3) Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

En s'appuyant sur la définition d'un cardinal qui stipule que deux ensembles X et Y ont le même cardinal si, et seulement s'il existe une bijection $X \to Y$, montrer que :

(i) si f est injective, alors $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$;

(ii) si f est surjective, alors $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

Les implication réciproques sont-elles vraies ?

4.4) Soit $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad h(p, q) = 2^p \, (2q + 1) \, .$$

Montrer que h est une bijection. Trouver une bijection♫ entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

4.5) Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$ des applications.

(i) Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

(ii) Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

(iii) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.

(iv) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

(v) Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont toutes les trois des bijections.

5 Quelques gros symboles

Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

(i) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= \{1\}$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} [\varepsilon, 1] =]0, 1]$

(iii) $\displaystyle\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - 1, n + 1[$

(iv) $\displaystyle[0, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n^2 - n, n^2 + n \right[$

(v) $\displaystyle[0, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n^3 - n^2, n^3 + n^2 \right[$

6 Un jeu abstrait, introduction aux groupes

Un *groupe* est un couple $(X, \star)$ où X est un ensemble et où $\star$ est une application $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x \star y$ qui vérifie les axiomes suivants (attention à la notation particulière de cette application, notée comme une opération sur X) :

(i) $\forall (x, y, z) \in X^3, \ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;

(ii) $\exists e \in X, \ \forall x \in X, \ x \star e = e \star x = x$;

(iii) $\forall x \in X, \ \exists y \in X, \ x \star y = y \star x = e$.

Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des bijections $E \to E$. Comme d'habitude, on note $\circ$ la composition des applications. Montrer que $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ est un groupe.

♫Une telle bijection a pour conséquence qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. S'assurer d'une argumentation précise. Ce résultat n'est pas dénué d'une certaine profondeur.

UVSQ 2023/2024
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA202 (algèbre linéaire I)

Feuille d'exercices numéro 2

7 Sous-espaces vectoriels

7.1) Soient V un espace vectoriel réel et W une partie de V. Montrer que les assertions (i), (ii) et (iii) suivantes sont équivalentes.

(i) W est un sous-espace vectoriel de V

(ii) (a) W est non vide
(b) W est *stable pour l'addition*, c'est-à-dire que $\forall v, w \in W,\ v + w \in W$
(c) W est *stable pour la loi externe*, c'est-à-dire que $\forall v \in W$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot v \in W$

(iii) (a) $0_V \in W$
(b) W est *stable par combinaisons linéaires*, c'est-à-dire que $\forall v, w \in W$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $xv + yw \in W$.

7.2) Soient V et W deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel réel U. Montrer que $V \cup W$ est un sous-espace vectoriel de U si, et seulement si $V \subseteq W$ ou $W \subseteq V$.

7.3) Dans les situations qui suivent, le sous-ensemble A du $\mathbb{R}$-espace vectoriel V en est-il un sous-espace vectoriel ?

(i) $V = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(x, y) \in V,\ x - 3y = 0\}$ (ii) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(x, y, z) \in V,\ x - 3y + 4z = 0\}$

(iii) $V = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V,\ x - 3y = -7\right\}$ (iv) $V = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V,\ x - 3y = 0\right\}$

(v) $V = \mathbb{R}^2$ et $A = \big\{(s, t) \in V,\ s^2 - t^2 = 0\big\}$ (vi) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \big\{(u, v, w) \in V,\ u^2 - 3v^3 + uw = 0\big\}$

(vii) $V = \mathbb{R}^4$ et $A = \big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ a - b + c - d = 0 \text{ et } a + 2c = 0\big\}$

(viii) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \big\{(x, y, z) \in V,\ (x - y)^2 + (y + z)^2 = 0\big\}$

(ix) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \big\{(x, y, z) \in V,\ (x - y)^2 + (y + z)^2 = 1\big\}$

(x) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \big\{(x, y, z) \in V,\ (x - y)^2 + (y + z)^2 = -1\big\}$

(xi) $V = \mathbb{R}^3$ et $A = \big\{(u, v, w) \in V,\ u^2 + v^2 + w^2 - 2vw = 0\big\}$

7.4) On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour les lois usuelles. Les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(i) $A = \{f \in \mathcal{F},\ f(3) = 0\}$ (ii) $B = \{f \in \mathcal{F},\ f(\pi) = -1\}$ (iii) $C = \{f \in \mathcal{F},\ \forall x \in [-1, 1],\ f(x) = 0\}$

(iv) $D = \big\{f \in \mathcal{F},\ f\left(\frac{22}{7}\right) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = 0\big\}$ (v) $E = \{f \in \mathcal{F},\ \text{ est dérivable et } f' = 2f\}$

(vi) $F = \{f \in \mathcal{F},\ \text{ est dérivable et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = \sin x\}$

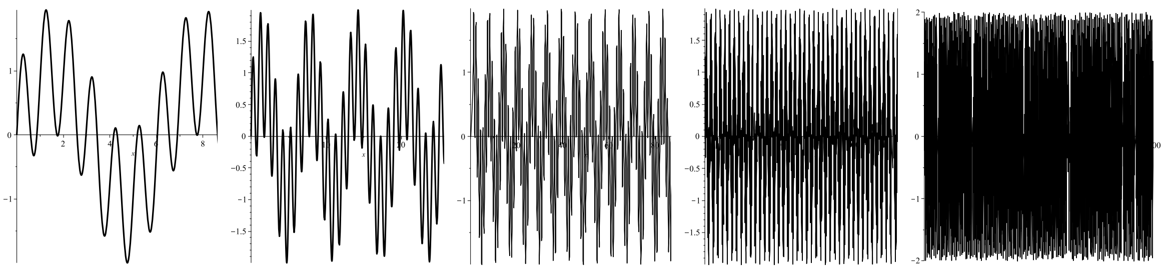
(vii) $G = \{f \in \mathcal{F},\ \text{ est dérivable deux fois et } f'' - f = 0\}$

(viii) $H = \{f \in \mathcal{F},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = -f(t)\}$ (ix) $I = \left\{f \in \mathcal{F},\ f \text{ est continue et } \displaystyle\int_{-1}^{2} f(s)ds = 0\right\}$

(x) $J = \left\{f \in \mathcal{F},\ f \text{ est continue et } \displaystyle\int_{1}^{2} f(s)ds = \frac{1}{2}\right\}$ (xi) $K = \{f \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 1) = f(x)\}$

(xii) $L = \{f \in \mathcal{F},\ \exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)\}$

[NB : l'exercice (xii) est plus difficile. La réponse est non. Montrer par exemple que la somme de la fonction *sinus* et de la fonction $x \mapsto sin\,(2\pi x)$ n'est pas périodique en dérivant deux fois une hypothétique T-périodicité. Contempler finement les dessins ci-dessous de $x \mapsto \sin x + \sin 2\pi x$.]



7.5) On note $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel réel des suites de nombres réels pour les lois usuelles. Les sous-ensembles suivants de $\mathcal{U}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(i) $A = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 1 \right\}$ (ii) $B = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n^2 = 0 \right\}$

(iii) $C = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 0 \right\}$ (iv) $D = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n \right\}$

(v) $E = \{ u \in \mathcal{U},\ u \text{ est croissante} \}$ (vi) $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+6} = u_n \right\}$

(vii) $G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \exists T \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n \right\}$

7.6) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. La *trace* d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}\,(M) = \sum_{k=1}^{d} m_{kk}.$$

(i) Montrer que pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Tr}\,(M+N) = \mathrm{Tr}\,(M) + \mathrm{Tr}\,(N) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(xM) = x\,\mathrm{Tr}\,(M)\,.$$

(ii) L'ensemble $\{ M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})\,,\ \ \mathrm{Tr}\,(M) = 0 \}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$?

(iii) L'ensemble $\left\{ (M,N) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2\,,\ \ \mathrm{Tr}\,(M) - 2\,\mathrm{Tr}\,(N) = 0 \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$?

7.7) L'ensemble

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})\,,\ a+b+c = d+e+f = a+d = b+e = c+f = 0 \right\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$? En donner trente-six éléments non nuls. Montrer que parmi les équations qui définissent M, au moins une est redondante et pourrait être enlevée dans la définition de M.

8 Sous-espaces vectoriels engendrés

8.1) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(-1, -\frac{1}{2}, 0, -1)$ et $(3, 0, -3, 3)$ est-il contenu dans

$$\left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + z = 0,\ x = t \right\}\ ?$$

8.2) Les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils tous dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

8.3) On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues muni des lois usuelles. On note ℓ, m et n les éléments suivants de $\mathcal{C}$:

$$\ell : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos^2 x \end{array} \qquad m : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(2x) \end{array} \qquad n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$$

L'application ℓ est-elle dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par m et n ?

8.4) On note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels pour les lois usuelles. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ engendré par les suites géométriques de raisons $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ est-il contenu dans

$$\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n\right\} \text{ ?}$$

8.5) Soient U, V et W trois sous-espaces d'un même espace vectoriel réel. Parmi les quatre inclusions suivantes, lesquelles sont-elles vraies ?

(i) $(U+V)\cap W \subseteq U\cap W + U\cap W$ (ii) $(U+V)\cap W \supseteq U\cap W + U\cap W$

(iii) $U+(V\cap W) \subseteq (U+V)\cap(U+W)$ (iv) $U+(V\cap W) \supseteq (U+V)\cap(U+W)$

9 Indépendance linéaire, génération de sous-espaces

9.1) Dans $\mathbb{R}^4$, étudier si les familles suivantes sont libres ou liées.

(i) $(2,3,0,5)$, $(0,1,0,4)$, $(1,1,0,2)$

(ii) $(-5,2,8,-16)$, $(-5,3,17,-14)$, $(1,1,11,6)$

(iii) $(0,1,2,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(0,2,-1,1)$, $(4,6,1,3)$

9.2) On considère les vecteurs $w_1 = (1,2,1,0)$, $w_2 = (-1,1,1,1)$, $w_3 = (2,-1,0,1)$ et $w_4 = (2,2,2,2)$. Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

9.3) Soit $E = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\}$. Donner un système générateur de E.

9.4) Soit $F = \left\{(u+v,u,v) \in \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\right\}$. Donner un système générateur de F.

9.5) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient A, B, C, D et E les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$A = (\alpha,-\alpha,\beta,-\beta),\ B = (\alpha,-\alpha,\beta,\beta),\ C = (\beta,\beta,\alpha,\alpha),\ D = (\beta,-\beta,\alpha,\alpha),\ E = (1,1,1,1).$$

(i) Trouver une relation linéaire entre A, B, C, D et E. Réponse : on trouve $\beta B + (\alpha+\beta)C - \alpha D - \beta(\alpha+\beta)E = 0$.

(ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que la famille $\{A,B,C,D\}$ soit libre.

9.6) Soient u, v et w trois vecteurs d'un espace vectoriel V. Les deux propriétés suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) u, v et w sont linéairement dépendants

(ii) u est une combinaison linéaire de v et w

Dans le cas contraire, établir si (i) implique (ii) ou si (ii) implique (i).

9.7) Soient u, v et w trois vecteurs d'un espace vectoriel V. Les trois propriétés suivantes sont-elles équivalentes ?

(i) u, v et w sont linéairement indépendants

(ii) u n'est pas combinaison linéaire de v et w

(iii) u, v et w sont deux à deux linéairement indépendants

Dans le cas contraire, établir toutes les implications vraies entre ces assertions.

9.8) Soient x, y et z trois vecteurs linéairement indépendants d'une espace vectoriel réel. Existe-t-il des réels tous non nuls a, b, c, d, e et f tels que la famille

$$\{ax+by, cy+dz, ez+fx\}$$

soit liée ?

9.9) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et γ un nombre réel. Soient

$$v_1 = e_2 + (1+\gamma)e_3, \quad v_2 = e_3 + (1+\gamma)e_1, \quad v_3 = e_1 + (1+\gamma)e_2.$$

A quelle condition sur γ la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

9.10) Montrer que les applications

$$t \mapsto t, \quad t \mapsto \ln t, \quad t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

sont linéairement indépendantes dans l'espace usuel des applications $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

9.11) Soient a et b deux nombres réels distincts. Montrer que les applications $t \mapsto e^{at}$ et $t \mapsto e^{bt}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel usuel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Généraliser ce résultat au cas de trois fonctions exponentielles, puis quatre, puis pour une famille quelconque d'applications du type $t \mapsto e^{ut}$, $u \in \mathbb{R}$.

9.12) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Montrer que la famille $\{P_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans l'espace usuel des applications réelles de la variable réelle.

9.13) Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \ln(1+x)$. On note $f_1 = f$ et on définit f_n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ par la formule $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes. Plus généralement, montrer que la famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est libre.

9.14) Soient r et s deux nombres complexes distincts. Montrer que les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

10 Bases, dimension

10.1) Dans les cas suivants, (u, v, w) est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

(i) $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, -1)$

(ii) $u = (0, 1, 2)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, 2, 0)$

(iii) $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$, $w = (1, c, c^2)$ où a, b et c sont des réels

10.2) Soient a, b, c et d les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$a = (1, -2, 1, 2),\ \ b = (1, -3, 1, 2),\ \ c = (2, -4, 3, 4),\ \ (1, -1, 2, 3).$$

(i) Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ dans la base (a, b, c, d).

(iii) Calculer les coordonnées dans la base (a, b, c, d) des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

10.3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$(a+2, a, a-2),\ \ (1, a, -1),\ \ \text{et}\ (a, -a, 1)\ ?$$

10.4) Soient V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, 2)$. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$. Montrer que $V = W$ et trouver une équation de cet hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

10.5) On se place dans $\mathbb{R}^4$.

(i) On considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$ et $v_3 = (2, 4, 0, 2)$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ii) On considère les vecteurs $w_1 = (1, 2, 1, 0)$, $w_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $w_3 = (2, -1, 0, 1)$ et $w_4 = (2, 2, 2, 2)$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

(iii) Déterminer une base de la somme et une base de l'intersection des deux sous-espaces des questions précédentes.

10.6) Soient $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + 2z = 0\}$. Donner des systèmes générateurs finis de G et de H. Quelles sont les dimensions de G et de H ? Calculer la dimension de $G \cap H$. Calculer la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $G \cup H$.

10.7) L'ensemble des nombres complexes comme espace vectoriel réel

On rappelle, c'est du cours, que l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{C}$ font de $\mathbb{C}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(i) Donner cinq bases différentes de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soient u et v deux nombres complexes non nuls. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $\frac{u}{v} \notin \mathbb{R}$.

10.8) Espaces de polynômes

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace des applications polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulles ou de degré inférieur ou égal à d.

(i) Trouver une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et calculer sa dimension.

(ii) Montrer que la famille $\left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (notations évidentes).

(iii) Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Q_n une fonction polynomiale de degré n. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille $\{Q_n,\ n \in \{0, \ldots, d\}\}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$.

10.9) Calculer la dimension de l'espace vectoriel engendré par les applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes (notations évidentes) : 1, $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$.

10.10) Espaces de suites définies par une relation de récurrence

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel usuel des suites à valeurs réelles.

(i) Montrer que l'ensemble des suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\pi}{4} u_n$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

(ii) Montrer que l'ensemble des suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et en donner une base (on pourra raisonner en cherchant si l'espace contient des suites géométriques).

10.11) Matrices symétriques et antisymétriques

Une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* lorsque $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour tous (i, j). Elle est dite *antisymétrique* lorsque $m_{i,j} = -m_{j,i}$ pour tous (i, j).

(i) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

(ii) Montrer que les des matrices antisymétriques forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$; calculer sa dimension.

(iii) Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices symétriques et les matrices antisymétriques.

(iv) On note $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques et $\mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices antisymétriques. Est-il vrai que $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$?

10.12) Carrés magiques

On appelle *carré magique* d'ordre 3 un tableau carré (matrice carrée 3×3) de neuf nombres réels tel que les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soient égales à un même nombre ; ce nombre est appelé *somme* du carré magique. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés magiques et $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des carrés magiques de somme nulle.

(i) Donner des exemples de carrés magiques en essayant d'en construire des non triviaux. Comment être sûr des les avoir tous ?

(ii) On considère un carré magique comme une matrice carrée, avec les opérations sur les matrices définies en cours. En adoptant ce point de vue, montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ sont des espaces vectoriels.

(iii) Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est dans $\mathcal{C}_0$, alors $a_{2,2} = 0$. Trouver un système générateur de $\mathcal{C}_0$.

(iv) Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est un carré magique de somme s, alors $3a_{2,2} = s$.

(v) On note [1] le carré magique dont tous les coefficients égalent 1, et $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par [1]. Montrer que toute matrice de $\mathcal{C}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $\mathcal{C}_0$ et d'un élément de $\mathcal{D}$.

(vi) Déduire de ce qui précède une façon de trouver tous les carrés magiques d'ordre 3. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}$?

(vii) Pour aller plus loin : généraliser tout cet exercice aux carrés magiques d'ordre d pour n'importe quel $d \in \mathbb{N}^*$.

10.13) Relation de Grassmann
Soient V et W deux sous-espaces vectoriels d'une espace vectoriel de dimension finie. On cherche à montrer la relation de Grassmann qui affirme que

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W). \tag{1}$$

(i) Se rappeler pourquoi $V \cap W$ est un sous-espace de V, de W et de $V+W$. En appliquant deux fois le théorème de la base incomplète, montrer qu'il existe des entiers naturels i, d et e et des vecteurs $u_1, \dots, u_i$, $v_{i+1} \dots, v_d$, $w_{i+1}, \dots w_e$ tels que :
- $(u_1, \dots u_i)$ est une base de $V \cap W$;
- $(u_1, \dots u_i, v_{i+1}, \dots, v_d)$ est une base de V ;
- $(u_1, \dots u_i, w_{i+1}, \dots, w_e)$ est une base de W.

(ii) Montrer que, dans les conditions de la question précédente,

$$(u_1, \dots u_i, v_{i+1}, \dots, v_d, w_{i+1}, \dots, w_e)$$

est une base de $V+W$.

(iii) Démontrer la relation de Grassmann (1).

10.14) Fonctions paires et impaires
On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note aussi $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des applications paires et $\mathcal{I}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des applications impaires. Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{F}$. Est-il vrai que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$?

Reprendre le même énoncé en remplaçant "applications" par "applications continues", puis par "applications de classe $\mathcal{C}^1$" et enfin par "applications polynomiales".

10.15) Dans tous les cas suivants, trouver un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ qui soit un supplémentaire de W (et même, dans un second temps, les trouver tous).

(i) $W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+z-2t=0\big\}$

(ii) $W = \mathbb{R}(0,1,1,1) + \mathbb{R}(1,0,1,1) + \mathbb{R}(1,1,0,1)$

(iii) $W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+z-2t=0 \text{ et } y+z=0\big\}$

(iv) W est le sous-espace engendré par $(-1,1,1,1)$ et $(1,1,-1,1)$

(v) W est l'intersection des hyperplans d'équations $x+y=0$, $y+z=0$, $z+t=0$

(vi) W est la droite vectorielle $\mathbb{R}(1,1,1,1)$

10.16) Soient W_1, W_2 et W_3 trois sous-espaces d'un espace vectoriel V. On suppose que $V = W_1 + W_2 + W_3$. Est-il vrai que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ si, et seulement si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, $W_1 \cap W_3 = \{0\}$ et $W_2 \cap W_3 = \{0\}$?

10.17) Soient V un espace vectoriel réel, W, W_1, W_2 trois sous-espaces de V. Est-il vrai que

$$V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2)\ ?$$

UVSQ 2023/2024
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA202 (algèbre linéaire I)

Feuille d'exercices numéro 3

11 Sont-elles linéaires ?

11.1) L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui traduit à l'aide de coordonnées la symétrie par rapport à l'axe des x est-elle linéaire ?

11.2) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. L'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)+(a,b,c)$, qui traduit à l'aide de coordonnées la translation de vecteur (a,b,c), est-elle linéaire ?

11.3) L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ est-elle linéaire ?

11.4) Si $1 \leq m \leq n$, l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_m)$ est-elle linéaire ?

11.5) On note $\mathcal{C}^0$ l'espace des applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ l'espace des applications continûment dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(i) L'application $\mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0$, $f \mapsto f'$ est-elle linéaire ?
(ii) L'application $\mathcal{C}^0 \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\int_{-2}^{5} f(t)dt$ est-elle linéaire ?
(iii) Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $\mathcal{C}^1 \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$ est-elle linéaire ?
(iv) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. L'application $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^0$, $g \mapsto g \circ f$ est-elle linéaire ?
(v) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. L'application $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^0$, $g \mapsto f \circ g$ est-elle linéaire ?

11.6) Soient E, F, G et H des espaces vectoriels réels et $f \in \mathrm{Hom}(F,G)$.
(i) L'application $\mathrm{Hom}(G,H) \to \mathrm{Hom}(F,H)$, $g \mapsto g \circ f$ est-elle linéaire ?
(ii) L'application $\mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}(E,G)$, $g \mapsto f \circ g$ est-elle linéaire ?

11.7) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(x\cos\theta - 2y\exp\left(\theta^2\right), \frac{\theta}{5}x + y\sin^2\theta\right)$ est-elle linéaire ?

12 Sous-espaces et applications linéaires

Démontrer, sans aucun calcul, que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ — on pourra les voir comme noyaux ou images d'applications linéaires que l'on explicitera. [Supplément d'âme, pour s'entraîner encore : calculer leurs dimensions.]

12.1) $A = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y-3t=0\right\}$

12.2) $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \exists u \in \mathbb{R},\ x=-u,\ y=\frac{3}{2}u,\ z=0,\ t=\pi u\right\}$

12.3) $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x-y+z-3t=0 \text{ et } x+z=0\right\}$

12.4) $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y=0,\ 2x-y-z=0,\ y+4t=0,\ x-y+z-2t=0, x-2z+t=0\right\}$

12.5) $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ x=2u+v,\ y=u-2v,\ z=u,\ t=-2v\right\}$

12.6) $B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \exists u,v \in \mathbb{R},\ z=u\right\}$

13 Equations paramétriques ou cartésiennes de sous-espaces

Dans les situations ci-dessous, V est un espace vectoriel réel, $\mathcal{B}$ une base de V et W un sous-espace vectoriel de V. Donner une équation paramétrique, une équation cartésienne de W et la dimension de W.

13.1) $V = \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de V et une équation paramétrique de W est

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 + 3t_2 - t_3 \\ x_2 = 3t_1 - t_2 + 2t_3 \\ x_3 = -t_1 + 2t_2 + 3t_3 \\ x_4 = t_1 + 2t_3 \\ x_5 = 2t_1 + 5t_3, \end{cases}$$

où t_1, t_2 et t_3 sont les paramètres.

13.2) $V = \mathbb{R}^5$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de V et une équation cartésienne de W est

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

13.3) $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de V et W est le sous-espace des matrices magiques de somme nulle (les sommes des trois lignes et des trois colonnes sont nulles).

13.4) $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de V et W est le sous-espace des matrices symétriques.

13.5) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On prend $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de V et $W = \{M \in V,\ JM = MJ\}$.

14 Applications linéaires injectives, surjectives ou bijectives, rang

14.1) Dans toutes les situations suivantes, étudier le noyau, l'injectivité, l'image, la surjectivité, la bijectivité et le rang de l'application linéaire f.

(i) On note $\mathcal{P}$ l'espace des applications polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour les lois usuelles. Prendre pour f l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P'$ où P' désigne l'application dérivée de P.

(ii) Dans les conditions de la question précédente, prendre pour f l'application $P \mapsto P' - P$.

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$.

(iv) f est l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(v) f est l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(vi) f est l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la transposée de M.

(vii) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Ici, f est l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui vérifie $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = e_4$ et $f(e_4) = e_3$.

(viii) Même question avec $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_4$, $f(e_3) = e_3$ et $f(e_4) = e_1$.

(ix) On note $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ici, f est l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

14.2) Soient E, F et G trois espaces vectoriels réels, $f \in \mathrm{Hom}(E, F)$ et $g \in \mathrm{Hom}(F, G)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\dim(E), \mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}.$$

15 Produit matriciel

15.1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2,$$

où O_2 désigne la matrice nulle. En déduire que A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.

15.2) Des gammes

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Calculer, lorsque cela est possible, les matrices suivantes :

(i) AB, BA, A^2, B^2, $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$

(ii) LC, CL, AC, LA

(iii) $A + E$, AE, EA, $E^t A$

(iv) AD, DA en retenant l'effet de la multiplication à droite ou à gauche par une matrice diagonale, qui a un intérêt algorithmique dont il sera question en cours.

15.3) Encore des gammes
Lorsque les matrices suivantes sont inversible, calculer leurs inverses.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

(ii) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

15.4) Introduction au Vandermonde

Soient $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} bc & -ac & ab \\ -(b+c) & a+c & -(a+b) \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Calculer WDV.

(ii) En déduire que V est inversible si, et seulement si a, b et c sont distincts ; calculer alors l'inverse de V.

15.5) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $(A + I_4)^2(A - 3I_4)^2 = O_4$, où O_4 désigne la matrice 4×4 nulle.
Développer ce produit, en déduire que A est inversible et calculer l'inverse de A en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

15.6) On suppose qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie une égalité du type

$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \cdots + a_2M^2 + a_1M + a_0I_n = O_n$$

où $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ avec $a_0 \neq 0$ et où O_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est inversible.

15.7) Applications de la question précédente

(i) Montrer que $R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est inversible.

[Sans se décourager, on calculera la puissance troisième de R.]

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$. Montrer que $C^3 = bC^2 + aC + I_3$. En déduire que C est inversible, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

16 Projecteurs et projections, même combat

Soient V un espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}(V)$.

16.1) On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de V et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $f \circ f = f$. Calculer le noyau et l'image de f et montrer qu'ils forment deux sous-espaces supplémentaires de V.

16.2) On suppose que $f \circ f = f$ — on appelle un tel endomorphisme un *projecteur*. Montrer que $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ et en déduire que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Montrer aussi que $\mathrm{im}(f) = \ker(f - \mathrm{id}_V)$. En déduire qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires W et W' de V tels que pour tous $(v, w, w') \in V \times W \times W'$,

$$v = w + w' \Longrightarrow f(v) = w.$$

16.3) Si $V = W \oplus W'$ où W et W' sont deux sous-espaces supplémentaires de V, on dit que f est la *projection sur W parallèlement à W'* lorsque $f(w + w') = w$, pour tout $(w, w') \in W \times W'$ — bien noter que cette définition n'a de sens que parce que la somme est directe. Montrer que f est une projection si, et seulement si f est un projecteur.

16.4) Soient W et W' deux sous-espaces supplémentaires de V. Soient p la projection sur W parallèlement à W' et q la projection sur W' parallèlement à W. Montrer que

$$p \circ p = p, \quad q \circ q = q, \quad p \circ q = q \circ p = 0 \;\text{ et }\; p + q = \mathrm{id}_V$$

— on a noté 0 l'endomorphisme nul.

16.5) Dans les conditions de la question précédente, on note $(w_1, \dots w_d)$ une base de W et $(w'_1, \dots w'_{d'})$ une base de W'. Montrer que $\mathcal{B} = (w_1, \dots w_d, w'_1, \dots w'_{d'})$ est une base de V et calculer

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \;\text{ et }\; \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q).$$

16.6) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\}$ et $B = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1)\}$. Montrer que A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. On note p la projection sur A parallèlement à B.

(i) Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en notant $(x', y', z') = p((x, y, z))$, calculer x', y' et z' en fonction de x, y et z (on pourra résoudre les équations fournies par les relations $(x', y', z') \in A$ et $(x', y', z') - (x, y, z) \in B$). Quel est le rang de p ?

(ii) Calculer la matrice P de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Calculer la matrice Q de la projection sur B parallèlement à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = O_3$ et $P + Q = I_3$.

16.7) En adoptant les définitions de l'exercice 17, on note s la symétrie par rapport à W parallèlement à W', et p la projection sur W parallèlement à W'. Montrer que $\mathrm{id}_V + s = 2p$.

17 Les involutions linéaires sont les symétries

Soient V un espace vectoriel réel, W et W' deux sous-espaces supplémentaires de V. Autrement dit, $V = W \oplus W'$.

17.1) La *symétrie par rapport à W parallèlement à W'* est l'application $s : V \to V$ définie par

$$\forall v, w, w' \in V \times W \times W',\ v = w + w' \Longrightarrow s(v) = w - w'. \tag{2}$$

Montrer pourquoi l'hypothèse $V = W \oplus W'$ garantit que (2) définit bien une application et montrer que s est linéaire.

Faire une dessin de l'effet de s lorsque V est un plan vectoriel et W et W' des droites de V. *Idem* lorsque $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ et (donc) $\dim W' = 1$.

17.2) Soit s la symétrie par rapport à W parallèlement à W'.

(i) Montrer que $s \circ s = \mathrm{id}_V$ — on dit que s est une *involution*.

(ii) En déduire que s est un automorphisme de V.

(iii) Calculer $\ker(s - \mathrm{id}_V)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_V)$.

17.3) Soit $s : V \to V$ une application linéaire involutive (*i.e.* telle que $s^2 = \mathrm{id}_V$).

(i) Montrer que $\ker(s - \mathrm{id}_V)$ et $\ker(s - \mathrm{id}_V)$ sont deux sous-espaces vectoriels de V et qu'ils sont supplémentaires.

(ii) En déduire que s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_V)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_V)$.

17.4) Soit s la symétrie par rapport à W parallèlement à W'. On note $(w_1, \dots w_d)$ une base de W et $(w'_1, \dots w'_{d'})$ une base de W'. Montrer que $\mathcal{B} = (w_1, \dots w_d, w'_1, \dots w'_{d'})$ est une base de V et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

17.5) Soit $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les deux applications linéaires dont les matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ sont

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & -7 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -14 & 2 & -1 \\ 2 & -11 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f et g sont des symétries ; calculer leurs axes et leurs directions.

17.6) Dans les deux situations de la question précédente, en appelant A l'axe de la symétrie et D sa direction, trouver des bases de A et de D ; on nomme $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en accolant la base choisie de A à celle de D. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et retrouver le résultat de la question **4)** : calculer la matrice de la symétrie dans cette nouvelle base $\mathcal{B}$ et conjuguer la matrice de la symétrie de façon bien choisie.

17.7) En adoptant les définitions de l'exercice 16, on note s la symétrie par rapport à W parallèlement à W', et p la projection sur W parallèlement à W'. Montrer que $\mathrm{id}_V + s = 2p$.

18 Indépendance de formes linéaires

18.1) On note a, b et c les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ suivantes : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$a(x, y, z) = x - y + z, \quad b(x, y, z) = x - z \quad \text{et} \quad c(x, y, z) = x + y.$$

Dans l'espace dual $\left(\mathbb{R}^3\right)^* = \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$, les vecteurs a, b et c sont-ils linéairement indépendants ?

18.2) On note dx, dy et dz les formes coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $dx(x, y, z) = x$, $dy(x, y, z) = y$ et $dz(x, y, z) = z$. Montrer que (dx, dy, dz) est une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. On l'appelle *base canonique* de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Calculer les coordonnées de a, b et c dans la base canonique de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

18.3) Dans les cas suivants, calculer la dimension du sous-espace de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ engendré par les formes linéaires $\ell_1, \dots \ell_n$ et calculer la dimension de l'intersection des hyperplans dont les ℓ_k sont des équations.

(i) $n = 2$, $\ell_1(x, y, z) = x + y + z$, $\ell_2(x, y, z) = x - y + z$

(ii) $n = 3$, $\ell_1 = dy + dz$, $\ell_2 = dz + dx$, $\ell_3 = dx + dy$

(iii) $n = 3$, $\ell_1(x, y, z) = x + y + z$, $\ell_2(x, y, z) = x - y + z$, $\ell_3(x, y, z) = x + 3y + z$

(iv) $n = 4$, $\ell_1(x, y, z) = x + y - z$, $\ell_2(x, y, z) = x - y + z$, $\ell_3(x, y, z) = -x + y + z$, $\ell_4(x, y, z) = x + y + z$

(v) $n = 4$, $\ell_1 = 2dx + dz$, $\ell_2 = dx - dy$, $\ell_3 = -dx - 3dy - 2dz$, $\ell_4 = dx + dy + dz$

19 Matrices d'applications linéaires dans des bases variées

Dans tous les cas suivants, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

(i) $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont égales à la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x - z, 3x - 4y + z)$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(iii) $f : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (-x+2y, 3x-3y, -y)$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (1, 2, 0), (-2, 1, 0), (0, 0, 1))$.

(v) $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'application identique, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(vi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ où les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont $\mathcal{C} = ((2, 1), (1, 1))$ et $\mathcal{C}' = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

20 Trouver des coordonnées

Soit $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Dans tous les cas suivants, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$, en utilisant une matrice de passage.

(i) $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$.

(ii) $\mathcal{B} = ((0, 0, -1), (0, -1, 0), (-1, 0, 0))$.

(iii) $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 2))$.

(iv) $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (0, 1, -2), (1, 0, 1))$.

21 Vers la dualité : deux formules opératoires

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie $d \geq 1$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de V. On note e_k^* la k^{e} forme coordonnée relative à la base $(e_1, \ldots, e_d)$.

21.1) Montrer que $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ est une base de V^*. On l'appelle classiquement la *base duale* de la base $(e_1, \ldots, e_d)$.

21.2) Montrer que pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(v) e_k.$$

21.3) Montrer que pour toute $\ell \in V^*$,

$$\ell = \sum_{k=1}^{d} \ell(e_k) e_k^*.$$

A noter
Lorsque $(v, \ell) \in V \times V^*$, on note parfois $\ell(v) = \langle v, \ell \rangle$. Les formules duales démontrées ci-dessus s'écrivent alors :

$$\mathrm{id}_V = \sum_{k=1}^{d} \langle \cdot, e_k^* \rangle e_k \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{V^*} = \sum_{k=1}^{d} \langle e_k, \cdot \rangle e_k^*$$

— exercice : préciser les notations.

22 Quelques centralisateurs

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$

22.1) Montrer (sans calcul) que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $B \in \mathbb{R}^* A$, alors $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$.

22.2) En considérant la matrice I_n, montrer que $\dim \mathcal{C}_A \geq 1$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En remarquant que $A \in \mathcal{C}_A$, montrer que $\dim \mathcal{C}_A \geq 2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[Pour cette deuxième inégalité, on pourra discuter selon que A est colinéaire à I_n ou non.]

22.3) Montrer que si A et une matrice diagonale dont tous les coefficients sont distincts, alors $\dim \mathcal{C}_A = n$ et donner une base de $\mathcal{C}_A$.

22.4) On suppose que $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\dim \mathcal{C}_A = 3$ et calculer une base de $\mathcal{C}_A$.

22.5) On suppose que $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\dim \mathcal{C}_A = 5$ et calculer une base de $\mathcal{C}_A$.

22.6) Montrer que lorsque $n = 2$, alors $\dim \mathcal{C}_A = 2$ si, et seulement si $A \notin \mathbb{R} I_2$.

[On pourra prendre une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ quelconque et discuter selon ses coefficients, en commençant par le cas générique $bc \neq 0$).]

23 De la trace

On rappelle, c'est du cours, que la trace d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$$

et que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}\, M$ est une forme linéaire.

23.1) Montrer que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

23.2) En déduire (avec minutie) que deux matrices semblables ont la même trace.

23.3) Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que deux matrices d'un même endomorphisme $f \in \mathrm{End}(V)$ ont la même trace — on prend la même base de V au départ et à l'arrivée. On définit ainsi la *trace de f* comme étant la trace commune à toutes les matrices qui représentent f.

23.4) Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne qui vaut 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\Big(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = 0\Big).$$

23.5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{H}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\dim \mathcal{H}_A = n - 1$ si, et seulement si $A \neq O_n$, où O_n désigne le zéro de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

23.6) On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ l'espace dual de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note t_A la forme linéaire

$$\begin{array}{rccc} t_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM). \end{array}$$

Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \\ & A & \longmapsto & t_A \end{array}$$

est linéaire et bijective.

23.7) Est-il vrai que pour toute forme linéaire $\ell \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ell(M) = \mathrm{Tr}(AM) \ ?$$

23.8) Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Est-il vrai que pour toute forme linéaire $\ell \in \mathrm{End}(V)^*$, il existe $a \in \mathrm{End}(V)$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{End}(V),\ \ell(f) = \mathrm{Tr}(a \circ f) \ ?$$

23.9) Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Est-il vrai que pour toute forme linéaire $\ell \in \mathrm{End}(V)^*$, il existe $b \in \mathrm{End}(V)$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{End}(V),\ \ell(f) = \mathrm{Tr}(f \circ b) \ ?$$

24 Formes linéaires sur les polynômes

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel réel des applications polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle ou dont le degré est inférieur ou égal à n. Ainsi, $f \in \mathbb{R}_n[x]$ si, et seulement s'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

24.1) Se rappeler, mémoire de lycén·ne, pourquoi il suffit qu'une application polynomiale soit nulle sur l'intervalle $[0,1]$ pour qu'elle soit nulle. Calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on note i_p l'application

$$\begin{array}{rccc} i_P : & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & Q & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx. \end{array}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Quelles propriétés de l'intégrale assurent que i_P est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$? Montrer que $i_P = 0$ si, et seulement si $P = 0$.

24.3) Montrer que l'application $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]^*$, $P \mapsto i_P$ est linéaire et bijective.

24.4) Montrer que pour toute forme linéaire $\ell : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[x]$ telle que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[x],\ \ell(Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

25 Noyau et image prescrites

Soient V un espace vectoriel (réel) de dimension finie, I et N deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de V tel que $I = \mathrm{im}(f)$ et $N = \ker(f)$ si, et seulement si $\dim I + \dim N = \dim V$.

26 Cas d'égalité du noyau et de l'image

Soient V un espace vectoriel (réel) de dimension finie et $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\ker(f) = \mathrm{im}(f)$

(ii) $f \circ f = 0$ et $\dim(V) = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

27 Dual d'un espace de dimension infinie

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel réel des applications polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ainsi, $f \in \mathbb{R}[x]$ si, et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

27.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par abus de langage, on note x^n l'application polynomiale $x \mapsto x^n$; on note aussi x^0 l'application constante $x \mapsto 1$. Montrer que la famille ordonnée $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[x]$.

[On rappelle qu'une partie $\mathcal{G}$ d'un espace vectoriel en est une famille génératrice lorsque tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire (sous-entendu : d'un ensemble *fini*) de vecteurs de $\mathcal{G}$. De même une famille $\mathcal{L}$ de l'espace en est une famille libre lorsque toute relation linéaire entre (sous-entendu : un ensemble *fini* de) vecteurs de $\mathcal{L}$ est nécessairement triviale.]

27.2) Quels sont les arguments précis qui montrent que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \delta_a : & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire ?

27.3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, a_1, \ldots a_n$ des nombres réels distincts. Trouver une application polynomiale P qui vérifie : $P(a) = 1$ et $P(a_k) = 0$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

27.4) Montrer que la famille $(\delta_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

27.5) Regrouper tous les arguments qui précèdent pour montrer que $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel de dimension (infinie) dénombrable alors que son dual $\mathbb{R}[x]^*$ est de dimension infinie non dénombrable.

28 Rang d'une composée

Soient X, Y et Z trois espaces vectoriels réels de dimensions finies, $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$. Schématiquement,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

28.1) Prouver que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\ker(g \circ f)$. Soit alors S un sous-espace supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\ker(g \circ f)$, c'est-à-dire trel que $\ker(g \circ f) = S \oplus \ker(f)$. Montrer que

$$f(S) = \mathrm{im}(f) \cap \ker(g).$$

28.2) En déduire que

$$\dim\ker(g \circ f) = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)$$

et que

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim\mathrm{im}(f) \cap \ker(g).$$

28.3) Déduire de la question précédente que

$$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim F - \dim\left(\mathrm{im}\, f + \ker g\right).$$

28.4) Montrer les inégalités

$$\max\left\{0, \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F\right\} \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\left\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\right\}.$$

29 Interpolation de Lagrange

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales nulles ou de degré inférieur ou égal à n.

29.1) Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, distincts. En reprenant les notations de l'exercice 25, montrer que $(\delta_{a_0}, \ldots \delta_{a_n})$ est une base de l'espace dual $\mathbb{R}_n[x]^*$.

29.2) Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, distincts et $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale P, nulle ou de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \ P(a_k) = b_k.$$

29.3) Dans les conditions de la question précédentes, montrer que P a la forme explicite suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{k\}} \frac{x - a_j}{a_k - a_j}.$$

30 Cas où noyau et image sont supplémentaires

Soient V un espace vectoriel (réel) et $f \in \mathrm{End}(V)$.

30.1) Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = (0)$ si, et seulement si $\ker(f \circ f) = \ker(f)$.

30.2) Montrer que $\ker(f) + \mathrm{im}(f) = V$ si, et seulement si $\mathrm{im}(f \circ f) = \mathrm{im}(f)$.

30.3) On suppose que V est de dimension finie. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$;

(ii) $\ker(f \circ f) = \ker(f)$;

(iii) $\mathrm{im}(f \circ f) = \mathrm{im}(f)$.

Feuille d'exercices numéro 4

31 Après l'algorithme : une introduction

Un système linéaire avec second membre (s), après application d'un algorithme du pivot de Gauss, est associé à la matrice échelonnée réduite

$$R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

31.1) Combien (s) a-t-il d'équations ? Combien (s) a-t-il d'inconnues ?

31.2) Calculer le rang de (s).

31.3) Résoudre (s) (en donner l'ensemble des solutions).

31.4) Existe-t-il une solution de (s) dont la somme des coordonnées soit nulle ?

32 Résolution de systèmes linéaires : des gammes

32.1) Ecrire sous forme matricielle et résoudre — de plusieurs façons y compris en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss — les systèmes linéaires suivants. Calculer leurs rangs.

(i) $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} t = -52 \\ -2z - t = 34 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} -7u + 56v = 7 \\ -2u + 16v = 17 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 27x_1 + x_2 = 23 \\ -14x_1 - x_2 = -10 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 6k = 6 \\ h + 3k = -4 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} x - 6y = 85 \\ x - y = 15 \end{cases}$ (vii) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} 6x + y = 0 \\ -10x - y = 0 \end{cases}$

32.2) Ecrire sous forme matricielle et résoudre — de plusieurs façons y compris en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss — les systèmes linéaires suivants. Calculer leurs rangs.

(i) $\begin{cases} 4y - 2z = 0 \\ x + 6z = 0 \\ 4x + 3y + z = 9 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} -9u - 45v - w = 0 \\ 2u + 10v - 2w = 0 \\ -u - 5v - 17w = 0 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 2 \\ 2x_1 - 12x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_3 = 4 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 14x_2 = -16 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 2x + 40y + 136z = 12 \\ -2x - 16z = 1 \\ x + y + 11z = 1 \end{cases}$ (vii) $\begin{cases} -b - c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \\ -a - 5b - 17c = 0 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} a + 3b + c = -2 \\ -a + 2b = 7 \\ -2b - c = -2 \end{cases}$ (ix) $\begin{cases} -4x - 2y - 14z = 2 \\ 10x + 20z = -10 \end{cases}$ (x) $\begin{cases} 5x + 35y - 40z = 9 \\ -x - 7y + 8z = -3 \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} -x + 9y + 2z = -6 \\ -2x + 18y + 2z = -4 \\ -5x + 45y + z = 6 \end{cases}$ (xii) $\begin{cases} -5x + 30y - z = 4 \\ -3x + 18y - z = 2 \\ -x + 6y + 4z = 17 \end{cases}$

32.3) Ecrire sous forme matricielle et résoudre — de plusieurs façons y compris en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss — les systèmes linéaires suivants. Calculer leurs rangs.

$$\text{(i)} \left\{\begin{array}{l} 3x - z - 5t = -5 \\ -2x + 9z + t = 45 \\ 4x + y - z - 4t = -7 \\ -2y - z + 2t = 1 \end{array}\right. \qquad \text{(ii)} \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -15 \\ -x_1 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_3 + x_4 = -11 \end{array}\right. \qquad \text{(iii)} \left\{\begin{array}{l} 8x + 16y + 64z = 0 \\ x + 2y + 8z - t = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(iv)} \left\{\begin{array}{l} -2x - 5y + 42z - 16t = 0 \\ 2x + 3y - 30z + 4t = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(v)} \left\{\begin{array}{l} -2a + 10b - c + 3d = -4 \\ a - 5b - c + 3d = 2 \end{array}\right. \qquad \text{(vi)} \left\{\begin{array}{l} x - 4y - z + t = 0 \\ 2x + 14z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + 25z + t = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(vii)} \left\{\begin{array}{l} x + 7y + 33z + 34t = 0 \\ x - 9z - t = 0 \\ -x + y + 15z + 6t = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(viii)} \left\{\begin{array}{l} -\alpha + 9\gamma - 7\delta = 11 \\ \beta + \gamma - 2\delta = -6 \\ \alpha + 2\beta - 7\gamma + 3\delta = -17 \end{array}\right. \qquad \text{(ix)} \left\{\begin{array}{l} 4x + y + 16z - 6t = 17 \\ x - 3y + 17z - 7t = 24 \\ -x + 10y - 45z = -10 \end{array}\right.$$

33 Où l'on discute selon la valeur de paramètres

Selon la valeur des paramètres réels a, b, $m\ldots$, calculer le rang des systèmes linéaires suivants et les résoudre — les inconnues sont notées x, y, z ou t. Ecrire l'ensemble des solutions sous plusieurs formes (ensembliste, équations paramétriques ou cartésiennes, etc).

33.1) Rapidement

$$\text{(i) } ax = 0 \qquad \text{(ii) } ax = \tfrac{1}{2} \qquad \text{(iii) } ax = b$$

33.2) Le dernier dit tout

$$\text{(i) } x + 2y = m \qquad \text{(ii) } ax - 3y = m \qquad \text{(iii) } ax + by = 1 \qquad \text{(iv) } ax + by = m$$

33.3) Deux-deux

$$\text{(i)} \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = a \\ 7x + 9y = b \end{array}\right. \quad \text{(ii)} \left\{\begin{array}{l} mx + 9y = a \\ x - 3y = b \end{array}\right. \quad \text{(iii)} \left\{\begin{array}{l} mx + 9y = a \\ x + my = b \end{array}\right. \quad \text{(iv)} \left\{\begin{array}{l} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{array}\right. \quad \text{(v)} \left\{\begin{array}{l} ax + cy = m \\ bx + dy = 0 \end{array}\right.$$

33.4) Plus-plus

$$\text{(i)} \left\{\begin{array}{l} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right. \qquad \text{(ii)} \left\{\begin{array}{l} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \end{array}\right. \qquad \text{(iii)} \left\{\begin{array}{l} x + y + (1-m)z = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{array}\right.$$

$$\text{(iv)} \left\{\begin{array}{l} x + ay + a^2 z + a^3 t = a \\ ax + a^2 y + a^3 z + t = a^2 \\ a^2 x + a^3 y + z + at = a^3 \\ a^3 x + y + az + a^2 t = a^4 \end{array}\right. \qquad \text{(v)} \left\{\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}\right.$$

34 Matrices de rang 1

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

34.1) Soient $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X\,{}^tY$ est une matrice de rang inférieur ou égal à 1 de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

34.2) Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $M = X\,{}^tY$.

35 Quelques calculs de rangs, encore des gammes

Calculer le rang des matrices suivantes, en discutant le cas échéant de la valeur des paramètres (bien sûr).

(i) $\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

(vii) $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\2 & 1\end{pmatrix}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ (viii) $\begin{pmatrix}a & 1\\0 & b\end{pmatrix}$ où $a,b\in\mathbb{R}$ (ix) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix}a & b & a\\b & a & a\end{pmatrix}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

(xi) $\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\-2 & 1\end{pmatrix}$ (xii) $\begin{pmatrix}1 & m\\m & m\\m+1 & m^2\end{pmatrix}$ où $m\in\mathbb{R}$ (xiii) $\begin{pmatrix}a & b-c\\c & a\\b+c & -a\end{pmatrix}$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$

(xiv) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (xv) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-3 & -3 & 3\\2 & 2 & -2\end{pmatrix}$ (xvi) $\begin{pmatrix}8 & 4 & -16\\0 & 4 & -8\\4 & 4 & -12\end{pmatrix}$ (xvii) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & -3 & 2\end{pmatrix}$

(xviii) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 6 & 2\\2 & -5 & 10 & 3\\3 & -8 & 17 & 4\end{pmatrix}$ (xix) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (xx) $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\0 & b & 1\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$

36 Caractérisation de la trace

On rappelle que la *trace* $\mathrm{Tr}(M)$ d'une matrice carrée M est la somme de ses coefficients diagonaux.

36.1) Soit $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ une application linéaire qui vérifie :
(i) $f(MN)=f(NM)$, pour toutes $M,N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
(ii) $f(I_2)=2$.
Montrer que $f(M)=\mathrm{Tr}(M)$, pour toute $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

[On pourra montrer que f prend la même valeur sur deux matrices semblables, puis calculer les valeurs nécessaires de l'image par f des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.]

36.2) Montrer que l'énoncé de la question précédente est encore vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $n\geq 2$.

37 Endomorphismes et matrices nilpotentes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie.

37.1) Soient r un entier naturel non nul et $W_1\subsetneq W_2\subsetneq\cdots\subsetneq W_r$ des sous-espaces vectoriels emboîtés de V. Pour chaque $k\in\{1,\ldots,r\}$, on note d_k la dimension de W_k. Montrer qu'il existe une base de V telle que, pour chaque $k\in\{1,\ldots,r\}$, les d_k premiers vecteurs de cette base forment une base de W_k.

37.2) Soit $u\in\mathrm{End}(V)$ un endomorphisme *nilpotent* de V, ce qui signifie qu'il existe un entier naturel non nul k tel que u^k soit l'endomorphisme nul. Soit r le plus petit entier naturel tel que $u^r=0$.

(i) Montrer que
$$\ker(u)\subsetneq\ker\left(u^2\right)\subsetneq\cdots\subsetneq\ker\left(u^{r-1}\right)\subsetneq\ker(u^r).$$

(ii) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de V dans laquelle la matrice de u est de la forme suivante (autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure avec une diagonale nulle) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & *\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

37.3) Montrer qu'un endomorphisme qui admet une base dans laquelle sa matrice est de la forme (3) est nilpotent.

37.4) Soit $n \geq 1$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* lorsqu'il existe un entier naturel non nul r tel que $M^r = O_n$ — on a noté O_n la matrice nulle de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'une matrice carrée est nilpotente si, et seulement si elle est semblable à une matrice de la forme (3).

37.5) Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes et leur trouver une matrice semblable de la forme (3) en explicitant la matrice de passage. Calculer le rang de ces matrices.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 4 & -11 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

38 Un endomorphisme d'un espace de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Montrer que f est linéaire. Calculer l'image et le noyau de f. Sont-ils supplémentaires ? Calculer la trace de f.

39 Un calcul de puissances

On note $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer U^n de deux façons :

(i) par un calcul direct ;

(ii) en remarquant que $(U - I_3)^3 = O_3$.

40 Deux équations linéaires matricielles

40.1) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = XB$.

40.2) Même question avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.