Lycées Bascan de Rambouillet et Hoche de Versailles
Introduction à l'exposé de C. Soulé sur Pascal à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
8 et 9 février 2008

# Sur les coefficients du binôme

## 1- Coefficients binomiaux

Définition de $\binom{n}{k}$ : nombre de parties à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments. Premiers calculs pour $n = 2$ et $n = 3$. Enoncé et preuve de la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Un peu plus de calculs, symétrie et interprétation combinatoire, début du triangle de Pascal. On remarque la formule récursive

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

preuve pour tous $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ par la combinatoire des parties (signaler qu'une preuve par le calcul est possible, exo pour les courageux). Cette formule donne son nom au *triangle de Pascal.*

## 2- Formule du binôme

C'est la formule

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \dots + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Preuve par le développement $(x+y)(x+y)\dots(x+y)$. Signaler qu'on peut faire une preuve par récurrence en utilisant la formule du triangle de Pascal. Exo pour les courageux.

## 3- Deux applications

Paradoxe des anniversaires. Prendre le pari ? Si la classe a 23 élèves, il y a plus d'une chance sur deux que deux d'entre eux soient nés le même jour. Si la classe a 50 élèves, la probabilité passe à $0,97$.

Arbres binaires plans, un calcul osé qui se justifie pleinement. Dessin pour montrer ce que signifie binaire plan. Premiers calculs. Note

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} A_n z^n$$

où $A_n$ est le nombre d'arbres binaires plans à $n$ sommets. Dessin de la propriété backward. Traduction : $F(z) = 1 + zF(z)^2$. On résout, et on trouve

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Or, la formule du binôme se généralise, pour $|x| > 1$, à la formule

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} x^n$$

où

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

ce qui montre que

$$F_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Les premiers termes : $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 5$, $F_4 = 14$, $F_5 = 42$, *etc.*

## 4- Nombres premiers

Rappel de ce qu'est un nombre premier. Remarquer sur le triangle de Pascal que si $p$ est premier, $p$ divise les $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$. Le montrer avec le théorème de Gauss en partant de $\binom{p}{k}$ est entier et $p! = (p-k)!k!\binom{p}{k}$.

Application aux congruences : pour tous entiers $x$ et $y$,

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \ [p].$$

Cette propriété est aujourd'hui à la base de la cryptographie.

## 5- Séries de Riemann

Convergence de $\sum 1/n^2$ en comparant à la série $\sum 1/n(n+1)$. Divergence de la série harmonique par comparaison série et intégrale. Généraliser aux séries $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ si $s > 1$. On peut montrer que $\zeta(s) = 1/(s-1) + \varphi(s)$ où $\varphi$ est "définie analytiquement" sur $\mathbb{R}_+$. Complexes : série de Riemann $\zeta(s)$ si $s$ est complexe et a une partie réelle strictement supérieure à 1, avec la formule $|1/n^{a+ib}| = 1/n^a$. Prolonger les fonctions $\zeta$ et $\varphi$ au demi-plan $\Re(z) > 0$ avec la même relation. Conjecture de Riemann.