Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé de Gérard Besson
De Poincaré à Perelman : une épopée mathématique du $20^{\text{ième}}$ *siècle* à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
11 février 2015.

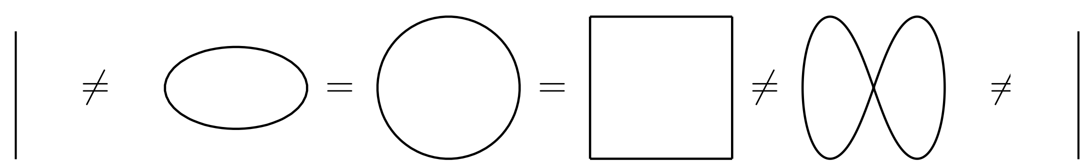
Eléments de topologie, notes d'exposé

1 Jeux topologiques

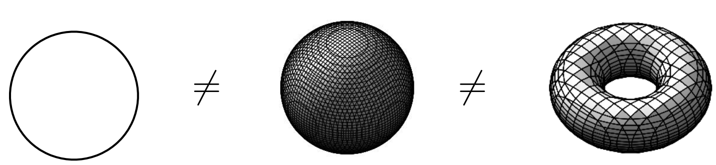
Fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sans formaliser. Dessins, exemples de x^2, de $1/x$, de $\lfloor x \rfloor$, de $|x|$ (mais aussi de $\sin 1/x$). Fonction dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sans formaliser. Tangente. Exemples. Caractère local.
Extension aux fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, aux fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, idem $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, *etc.* Exemples
Equivalence à déformation continue ou différentiable près : parties *homéomorphes* ou *difféomorphes* de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, *etc.*
Exemples sur les lettres en caractère d'imprimerie, en commençant par les lettres I, C et V. Pourquoi I et T ne sont pas homéomorphes (enlever un point ne disconnecte pas de la même façon). Classes d'homéomorphismes (et de difféomorphismes) de ces lettres.

$$\mathsf{A} = \mathsf{R},\ \mathsf{B},\ \mathsf{C} = \mathsf{G} = \mathsf{I} = \mathsf{J} = \mathsf{L} = \mathsf{M} = \mathsf{N} = \mathsf{S} = \mathsf{U} = \mathsf{V} = \mathsf{W} = \mathsf{Z},$$
$$\mathsf{D} = \mathsf{O},\ \mathsf{E} = \mathsf{F} = \mathsf{T} = \mathsf{Y},\ \mathsf{H} = \mathsf{K},\ \mathsf{P},\ \mathsf{Q},\ \mathsf{X}$$

Le cercle et l'ellipse sont difféomorphes (on peut facilement expliciter un homéomorphisme). Le cercle et le carré sont homéomorphes (pas difféomorphes à cause des coins). Le cercle et le segment ne le sont pas, le cercle et le huit non plus.



Sphère S^2 et cube (le bord) sont homéomorphes. Sphère S^2 et cercle S^1 ne le sont pas (enlever deux points), cylindre et cercle non plus, sphère et disque non plus (on peut enlever une courbe fermée au disque – son bord – sans le disconnecter). Sphère et tore ne sont pas homéomorphes (enlever une courbe fermée du tore qui ne disconnecte pas).



En topologie, deux objets homéomorphes sont indiscernables. Métaphore de l'objet (infiniment) élastique. On va faire de la topologie.

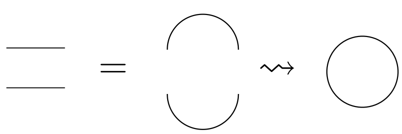
2 Variétés

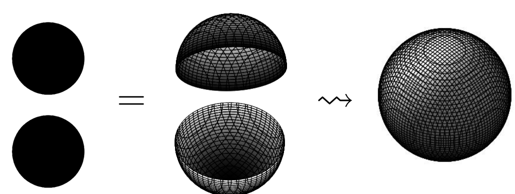
Dans une *variété de dimension* 1 (une *courbe*), tout point a un voisinage homéomorphe au segment ouvert $]-1,1[$. Dans une *variété de dimension* 2 (une *surface*), tout point a un voisinage homéomorphe au disque ouvert $\{(x,y),\ x^2+y^2<1\}$ (ou au carré $]-1,1[\times]-1,1[$). Plus généralement, dans une *variété (topologique) de dimension* d, tout point a un voisinage homéomorphe à la boule d-dimensionelle ouverte $\{(x_1,\dots,x_d),\ x_1^2+\dots+x_d^2<1\}$ (ou encore à l'*hypercube* $]0,1[^d$). Dessins.

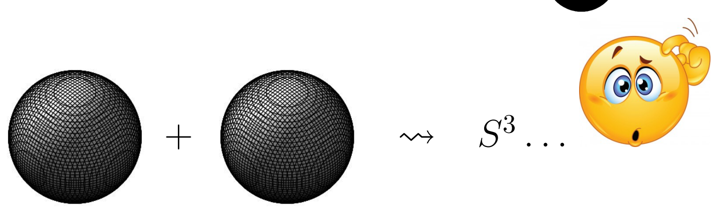
Motivation de la description locale. Cartes et atlas de la Terre. Géométrie euclidienne locale. Globale ?

Une variété est *compacte* quand elle est contenue dans une boule et quand on ne peut pas lui ajouter de bord. Exemples : cercle, sphère, deux sphères disjointes, tore. Contre exemples : droite, segment ouvert, demi-plan, disque ouvert.

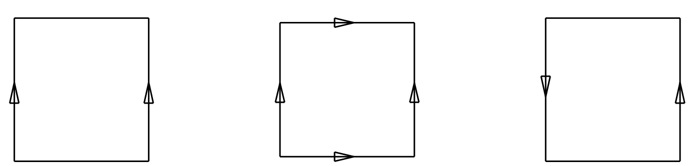
Exemples de variétés de dimension 1 : $\mathbb{R}$, $]0,+\infty[$, $]1,\pi[$ (tous homéomorphes, montrer des graphes de fonctions), le cercle (il est compact) ; en revanche, $[0,1]$ et $[1,\pi[$ n'en sont pas (ils ont un bord), le huit non plus (point singulier), le A et le T non plus.
Exemples de variétés de dimension 2 : $\mathbb{R}^2$, la boule ouverte, le cube ouvert (non compacts), la sphère S^2, le tore de dimension 2 (compacts).
Exemples de variétés de dimension 3 : $\mathbb{R}^3$, la boule ouverte, le cube ouvert (non compacts). La sphère S^3, compacte (la voir par une équation dans $\mathbb{R}^4$, ou en recollant deux boules de dimension 3 le long de leurs bords (ces bords sont des sphères S^2).





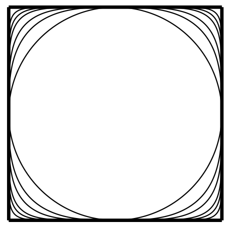
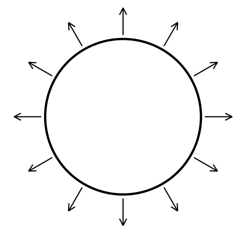


Exemples. Construire des surfaces par identification ou par somme connexe.



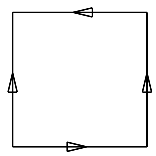
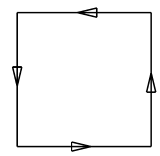
Cylindre Tore Bande de Möbius

Orientabilité des surfaces différentiables (orienter continûment les plans tangents). Pour orienter une surface topologique, l'approcher par des surfaces différentiables (Stone-Weierstrass, Bernstein ?).

Exemples. Le cercle est orientable, la sphère S^2 aussi (*de visu*).

Le cylindre est orientable ; la bande de Möbius ne l'est pas. Manipulation colle-et-ciseaux.
Autre manifestation de la non orientabilité : l'espace SO(3) des rotations de l'espace n'est pas orientable, le voir en montrant le *coup de l'assiette* où on exhibe un lacet à parcourir deux fois pour "trouver zéro".
La *Bouteille de Klein* (la décrire sommairement par identification dans le carré, ou en collant deux rubans de Möbius le long de leurs bords) est une surface compacte non orientable.

Plan projectif réel Bouteille de Klein

Théorème (classification des surfaces compactes orientables) *Toute surface orientable (compacte, en un seul morceau) est homéomorphe à un tore à trous. Deux tores à trous sont homéomorphes si, et seulement s'ils ont le même nombre de trous.*

[Pas simple du tout. On peut utiliser la théorie de Marston Morse (1892 – 1977) des surfaces différentiables.]

3 Homotopie des lacets

Chemin, lacet, homotopie. Exemples d'homotopie de lacets dans le disque, dans une couronne, sur la sphère, sur un cylindre, sur un ruban de Möbius, sur un tore à un ou plusieurs trous.

Simple connexité : lorsque tous les lacets sont homotopes à un point.
Les sphères sont simplement connexes en dimension ≥ 2.

Théorème *Toute surface (compacte, sans bord, orientable[1], en un seul morceau) simplement connexe est (homéomorphe à) une sphère S^2.*

[Ce théorème découle de la classification des surfaces.]

Quid de la dimension 3 ?
Conjecture de Henri Poincaré (1854 – 1912), théorème de Grigori Perelman (né en 1966). Très difficile, médaille Fields de Perelman. Fin d'un long feuilleton qui aura duré tout le 20$^{\text{ième}}$ siècle. Ce sera l'histoire de Gérard Besson le 11 février.

A l'origine, motivations physiques (très grossièrement, dans quel espace vit-on ? Quelle est la géométrie – ou la topologie – de l'univers ?).

[1] On peut enlever *orientable*, c'est encore vrai.