Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé de J.-P. Ramis sur Euler à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
3 avril 2009

Sur la convergence et la divergence des séries numériques

1- Introduction

Calcul de $\sum_{n\geq 0}(1/2)^n$, paradoxe de Zénon, calcul de Bernoulli et contradiction apparente.

Explication de Zénon par calcul explicite sur les séries géométriques, explication de la conclusion de Bernoulli par la preuve de la divergence de la série harmonique (paquets de n à $2n$, on montre que $\sum_{k=1}^{2^n} 1/k \geq n/2$).

Premier constat : sommer des termes positifs qui tendent vers 0 peut tendre vers un nombre ou vers $+\infty$ (toute suite croissante converge ou tend vers $+\infty$).

2- Séries de Riemann et comparaison intégrale

Dessin du graphe de $x \mapsto 1/x$ sur $[1, +\infty[$, zoom sur l'intervalle $[n, n+1]$, encadrement de l'intégrale puis de $1/n$, encadrement $\log(n+1) \leq \sum_1^n 1/k \leq 1 + \log n$, approximation de la somme harmonique.

Evoquer le même calcul avec le graphe de $x \mapsto 1/x^s$, primitive de cette fonction, majoration si $s > 1$, minoration si $s < 1$. Séries de Riemann. Fonction $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ définie sur $]1, +\infty[$.

Intermède cubes/Lune. Pour aller plus loin : $\zeta(2) = \pi^2/6$ (plus de math, séries de Fourier, "harmoniques" d'une fonction, acoustique et timbre), $\zeta(3)$ est-il rationnel ? On peut montrer que $\zeta(s) = 1/(s-1) + \varphi(s)$ où φ est "définie analytiquement" sur $\mathbb{R}_+$. Complexes : série de Riemann $\zeta(s)$ si s est complexe et a une partie réelle strictement supérieure à 1, avec la formule $|1/n^{a+ib}| = 1/n^a$. Prolonger les fonctions ζ et φ au demi-plan $\Re(z) > 0$ avec la même relation. Conjecture de Riemann.

3- Série harmonique alternée

C'est la série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n$. Série géométrique : si $|x| < 1$, alors $1/(1-x) = \sum_{n\geq 0} x^n$. On intègre (licite) : si $|x| < 1$, alors $\log 1/(1-x) = \sum_{n\geq 1} x^{n+1}/n$. En $x = -1$, on trouve $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots = \log 2$; gonflé mais justifiable. Essayer avec une machine !

Mais, on peut faire converger cette série vers n'importe quel nombre réel en modifiant l'ordre de sommation (car la série harmonique diverge). Raconter comment. En bref, sommer des termes positifs, l'ordre ne compte pas. En général, l'ordre compte. Comparer aux sommes finies.

5- Séries divergentes

$\sum(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Quel sens donner cette somme ? Les sommes partielles valent alternativement 1 et 0.

Premier essai : supposons que $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ soit un nombre, avec les règles usuelles de calcul. Alors $1 - S = S$, *i.e.* $S = 1/2$.

Deuxième essai : reprendre $1/(1-x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ et faire $x = -1$ (ça, c'est vraiment gonflé). On trouve encore $S = 1/2$.

Troisième essai : on fait des moyennes de sommes partielles : on note $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$. Calcul élémentaire : $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$. Moyennes : $(S_0 + S_1 + \cdots + S_{2n})/(2n+1) = (n+1)/(2n+1)$ et $(S_0 + S_1 + \cdots + S_{2n+1})/(2n+2) = (n+1)/(2n+2) = 1/2$. Cela montre que la suite des moyennes $(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)/(n+1)$ converge vers $1/2$.

Ce genre de procédé s'appelle une *resommation* de la série divergente $\sum(-1)^n$. Euler : pionnier et virtuose.

On essaye avec la série $1-2+3-4+5-6\cdots$. On note T ce "nombre". Sommer en décalant d'un rang vers la droite : $T+T=1-1+1-1+\cdots=S$. D'où $T=1/4$.

Deuxième essai : on dérive $1/(1-x)=\sum_{n\geq 0}x^n$ et on obtient $1/(1-x)^2=\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}$, pour $|x|<1$ (ça, c'est licite). On fait $x=-1$ et on retrouve $T=1/4$ (ça, c'est vraiment gonflé).

Troisième essai en considérant la suite des moyennes des sommes partielles : ça ne marche plus, il faut appliquer deux fois le procédé pour trouver un nombre. C'est encore $1/4$.

4- Série des nombres premiers

Rappel de ce qu'est un nombre premier. Il y en a une infinité (Euclide). Mieux, la série $\sum 1/p$ diverge.

"Preuve" (Euler) : considérer le produit infini $P=\prod_p 1/(1-1/p)$ (en supposant que cela définit un nombre). Alors, $\log P=\sum \log 1/(1-1/p)$. Or, si $x\in[0,1/2]$, on a $\log 1/(1-x)\leq x+x^2$ (exo). Et donc $\log P\leq \sum 1/p+\sum 1/p^2$. Comme $\sum 1/p^2\leq\sum 1/n^2=\pi^2/6$, on obtient que $\sum 1/p\geq \log P-\pi^2/6$.

Par ailleurs, $P=\prod(1+1/p+1/p^2+\cdots)$. En développant, on obtient une fois et une seule toutes les décompositions en produits de nombres premiers. Cela donne que $P=\sum 1/n=+\infty$. Donc la série des inverses des nombres premiers diverge.

Tout ce "calcul sur l'infini" peut être légitimé avec rigueur.