Lycée Pasteur de Calgary
Introduction à l'exposé de François Charles
Hermite et les mystères de l'exponentielle
à la BNF, conférences *Un texte, un mathématicien.*
9 février 2022.

Familiers nombres réels ?

Notes d'exposé

1 Introduction : qu'est-ce qu'un nombre réel ?

On ne va pas ici répondre complètement à cette question par une définition formelle, c'est du ressort de l'enseignement supérieur. On se contentera d'un aperçu.

Sont bien connus : les entiers, positifs ou négatifs, les rationnels, $\sqrt{5}$ (qu'est ce nombre ?), π (qu'est ce nombre ?), etc.

On représente souvent les réels comme les abscisses des points d'une droite. En creusant un peu, cette représentation a des défauts. Qu'est-ce qu'une droite ? Comment représenter les nombres rationnels comme les abscisses des points d'une droite ?

2 Approcher des réels par des rationnels

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: entre deux réels, il y a un rationnel (et un irrationnel), ou encore, tout nombre réel s'approche d'aussi près qu'on veut par un rationnel, ou encore, tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.

Une manière d'approcher les réels par des rationnels : les développements décimaux.
Par exemple, $0,0872013131354097869786533355555524310019080607\ldots$ est (le début) du développement décimal d'un réel.

Un exemple : soit $r = 0,2103103\overline{103}\ldots$ (période 103). Quel est ce nombre ?
La suite 0 ; $0,2$; $0,21$; $0,210$; $0,2013$; $0,21032$; $\ldots$ est croissante.
Par ailleurs, on voit aisément que tous les termes de cette suite sont inférieurs ou égaux à $0,3333\overline{3333} = \frac{1}{3}$ (poser la division comme à l'Ecole élémentaire).
Donc cette suite converge (oui, oui, une suite croissante et majorée de nombres réels converge). C'est sa limite qu'on appelle r.
D'ailleurs, $10r - 2 = 0,\overline{103}$. Si on note $s = 10r - 2$, alors $1000s - 103 = s$ et donc $s = \frac{103}{999}$. On en déduit que $r = \frac{s+2}{10} = \frac{2101}{9990}$.

Ainsi, tout développement de la forme $0,c_1c_2c_3\ldots$, où les c_k sont des chiffres ($c_k \in \{0,\ldots,9\}$), définit un nombre réel comme limite d'une suite. En passant, $0,\overline{9} = 1$ (somme des termes d'une suite géométrique).

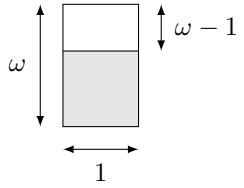
En procédant comme dans l'exemple, on voit que si le développement décimal a une période ultime, le nombre réel qu'il définit est rationnel. Inversement, la division euclidienne montre que tout nombre rationnel a un développement décimal ultimement périodique (à chaque étape, il n'y a qu'un ensemble fini de restes possibles)

Par exemple, le nombre $0,01234567891011121314151617181920212 2\ldots$, construit en concaténant les écritures des entiers naturels successifs en base 10, est irrationnel (pas de périodicité).

3 Nombres algébriques

Le nombre $\sqrt{5}$ est irrationnel (preuve arithmétique). Mais il est solution de l'équation algébrique $x^2 - 5 = 0$. On dit encore que $\sqrt{5}$ est racine du polynôme $X^2 - 5$, dont les coefficients sont entiers : il est *algébrique*.

Autre nombre algébrique célèbre : le nombre d'or que l'on note ici ω. Définition géométrique (sciences et arts, Vinci♫, dessin ci-dessous). Il vérifie $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$: c'est la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$. On sait faire ce calcul : $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il est irrationnel.

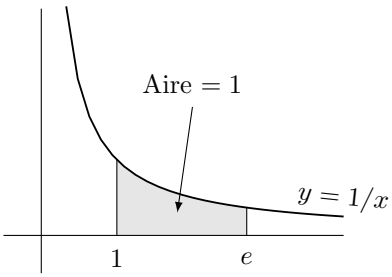


Tous les nombres rationnels sont algébriques : $\frac{n}{d}$ est racine de $dX - n$. Il y donc davantage de nombres algébriques que de rationnels. Y a-t-il des nombres non algébriques ?

Règle et compas, géométrie de la Grèce antique. Quadrature du cercle. Question longue. Il a fallu attendre la fin du $19^{ième}$ siècle pour montrer deux points :
(i) Galois♫ : les coordonnées des points que l'on construit à la règle et au compas sont toutes algébriques (on appelle ces coordonnés les nombres *constructibles*, tous les algébriques ne sont pas constructibles)
(ii) Lindemann♫ (1882) : π n'est pas algébrique.
Cela prouve que la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Les nombres qui ne sont pas algébriques sont dits *transcendants*.

Autre exemple : le nombre e est transcendant (Hermite♫, 1873 ; on ne le montre pas ici). Pour celles et ceux qui connaissent l'exponentielle, $e = \exp(1)$. Pour les autres qui ne savent pas encore que l'exponentielle est la star des mathématiques, c'est le nombre qui fait que l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de $xy = 1$ et les droites verticales d'abscisses 1 et e vaut 1.



Y a-t-il beaucoup de nombre transcendants ?

4 Compter les nombres

$\mathbb{N}$ est infini. On appelle son"cardinal" le *dénombrable*, ce qui signifie qu'un ensemble dénombrable lorsqu'on peut l'étiqueter par $\mathbb{N}$. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs, ou des multiples de 8, ou des nombres entiers congrus à 5 modulo 13 sont dénombrables.

Autre exemple : $\mathbb{Z}$ est dénombrable (dessin).

Autre exemple : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (dessin éblouissant).
Conséquences : une union dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.

L'ensemble des polynômes de degré 1 à coefficients entiers est dénombrable ($dX + n$: choix de deux entiers $(d, n) \in \mathbb{Z}^2$). Un tel polynôme a une unique racine. Donc l'ensemble des racines des polynômes de degré 1 à coefficients entiers est dénombrable : c'est $\mathbb{Q}$!

♫Leonardo di ser Piero da Vinci, 1452–1519
♫Evariste Galois, 1811–1832
♫Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939
♫Charles Hermite, 1822–1901

On continue : l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients entiers est dénombrable (aX^2+bX+c : choix de trois entiers $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$). Un tel polynôme a au plus deux racines réelles (parfois une, parfois aucune). Donc l'ensemble des racines des polynômes de degré 2 à coefficients entiers est dénombrable.

De même, pour tout entier naturel non nul d, l'ensemble des racines des polynômes de degré d à coefficients entiers est dénombrable. En prenant la réunion (dénombrable) de ces ensembles dénombrables, on voit que *l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.*

Et $\mathbb{R}$? Est-il dénombrable ?
Argument de la diagonale de Cantor[♫] (1891) : $]0,1[$ n'est pas dénombrable. Donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. A vrai dire, Cantor avait déjà montré cela autrement en 1874.

On en déduit que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable. En particulier, il n'est pas vide !

5 Comment reconnaître qu'un nombre est transcendant ?

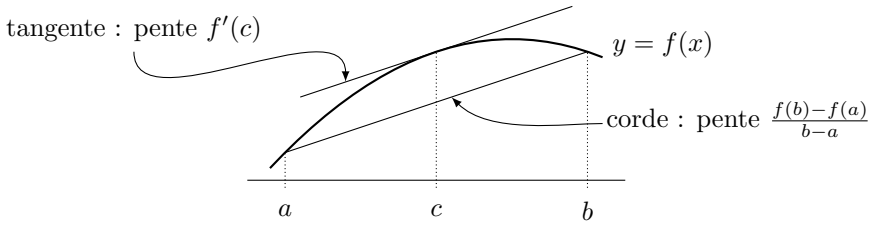
Un nombre transcendant est un nombre qui "s'approche bien" par les nombres rationnels. On en dit un peu plus.

5.1 Le théorème de Liouville

Supposons que α soit racine non rationnelle du polynôme $P(X)=aX^2+bX+c$ dont les coefficients sont des entiers. Si p et $q\neq 0$ sont des entiers, alors $q^2\left|P(\alpha)-P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|ap^2+bpq+cq^2\right|$ est un entier naturel non nul. Ainsi,

$$q^2\left|P(\alpha)-P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1$$

La *formule des accroissements finis* dit que si une fonction est dérivable entre a et b, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Dessin pour illustrer cette formule : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la corde, $f'(c)$ est la pente de la tangente.



Revenons à nos moutons : il existe un réel x entre α et $\frac{p}{q}$ tel que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\times|P'(x)|\geq\frac{1}{q^2}$$

En raffinant un tout petit peu, on montrerait qu'il existe un nombre réel $C_\alpha>0$ qui ne dépend que de α et qui vérifie

$$\forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\quad\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{C_\alpha\times q^2}$$

Ce résultat se généralise en remplaçant le degré 2 par un degré d arbitraire : *si α est racine (simple) d'un polynôme de degré d à coefficients entiers, alors*

$$\boxed{\exists C_\alpha>0,\ \forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\quad\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{C_\alpha\times q^d}}$$

[♫] Georg Cantor, 1845–1918

C'est le théorème de Liouville♫ (enfin, un des théorèmes de Liouville). Par conséquent, un nombre rationnel p/q ne peut pas approcher α à une distance inférieure à $\frac{1}{q^d}$, à une constante près : *la vitesse de convergence d'une suite de rationnels vers un nombre algébrique ne peut pas être extrêmement rapide.*

5.2 Les nombres de Liouville

Considérons alors le nombre

ℓ=0,1100010000000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001…

dont tous les chiffres sont nuls, exceptés ceux qui sont aux rangs $n!$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ces rangs sont $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 39916800, \dots$.
Eh bien,

$$\boxed{\ell \text{ est transcendant.}}$$

En effet, il est la limite des nombres rationnels $r_1 = \frac{1}{10}$, $r_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}$, $r_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6}$, et plus généralement

$$r_n = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{p_n}{10^{n!}}$$

où p_n est un nombre entier naturel, numérateur de la fraction obtenue en réduisant la somme au même dénominateur.
La différence entre ℓ et r_n, qui est positive, est la "fin" du développement décimal de ℓ. On peut l'écrire comme une somme infinie(qui est une limite, comme dans toute écriture décimale)

$$0 < \ell - \frac{p_n}{10^{n!}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+2)!}} + \frac{1}{10^{(n+3)!}} + \dots$$

En mettant $\frac{1}{10^{(n+1)!}}$ en facteur de tous ces nombres, on obtient

$$0 < \ell - \frac{p_n}{10^{n!}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(n+2)!-(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+3)!-(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+4)!-(n+1)!}} \dots \right)$$

Or, en mettant $(n+1)!$ en facteur, on voit que, très grossièrement,
$(n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n+1) \geq n \geq 1$,
$(n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n^2 + \dots) \geq n^2 \geq 2$,
$(n+3)! - (n+1)! = (n+1)!(n^3 + \dots) \geq n^3 \geq 3$, etc.
En reportant, aboutit à l'inégalité

$$0 < \ell - \frac{p_n}{10^{n!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

On reconnaît là, dans le membre de droite, la somme d'une suite géométrique. Comme chacun sait,

$$1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^p} \; = \; \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{10}} \quad \xrightarrow[\text{en croissant}]{p \to +\infty} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \leq 2$$

Au bout du compte, on arrive à l'encadrement, vrai pour tous les entiers naturels non nuls n :

$$\boxed{0 < \ell - \frac{p_n}{10^{n!}} < 2 \left(\frac{1}{10^{n!}} \right)^{n+1}}$$

♫Joseph Liouville, 1809–1882

Supposons alors que ℓ soit algébrique, de degré d. Le théorème de Liouville assurerait alors l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{C}\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^d < \left|\ell - \frac{p_n}{10^{n!}}\right| < 2\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}$$

ce qui, en divisant le tout par $\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}$ et en ne conservant que les extrêmes de ces deux inégalités, donnerait

$$\frac{1}{C} < 2 \times \frac{\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^d} = \frac{1}{10^{n!(n+1-d)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $1/C > 0$, on aboutit à une contradiction qui oblige ℓ à être transcendant (ouf !).

Un raisonnement analogue peut être fait en remplaçant les chiffres 1 par n'importe quelle suite de chiffres de $\{0, \ldots, 9\}$. On obtient ainsi les *nombres de Liouville*, tous transcendants. L'ensemble des nombres de Liouville est en bijection avec $]0, 1[$: ils constituent un ensemble non dénombrable de nombres transcendants explicites.

Pour finir

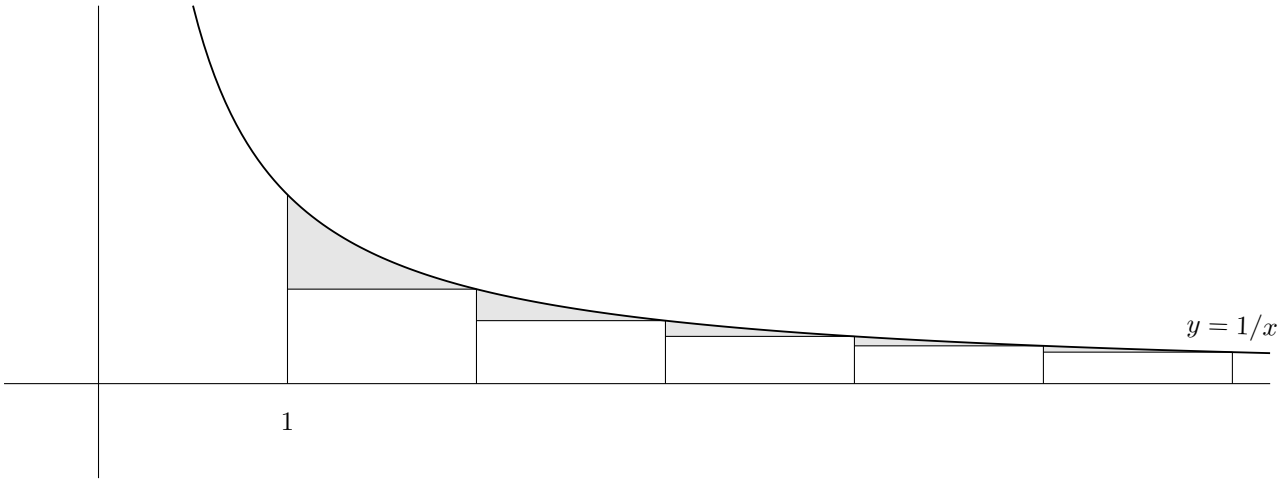
Il y a beaucoup de nombres célèbres dont on ne sait pas démontrer s'ils ont rationnels, algébriques, ou transcendants.

Le nombre $\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$est transcendant, puisque π l'est.

Le nombre $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$ est irrationnel. Cela n'a été démontré qu'en 1978 par Apéry♫. Personne ne sait s'il est transcendant.

Pour les $\zeta(2n)$, on a des formules closes en fonction de π qui montrent que ces nombres sont transcendants. En revanche, personne ne sait si $\zeta(5)$, $\zeta(7)\ldots$ sont rationnels ou non.

La *constante d'Euler* γ est la limite de la suite $-\ln n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$, ou encore la somme des aires grisées. C'est un nombre qui intervient dans beaucoup de domaines des mathématiques. Nul ne sait si γ est rationnel.



♫Roger Apéry, 1916–1994