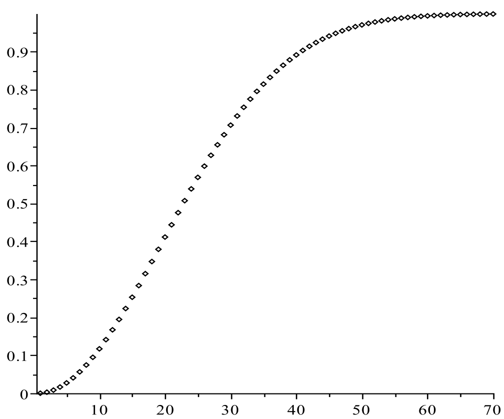
Lycée Bascan de Rambouillet
Introduction à l'exposé de Gérard Ben Arous
Paul lévy et les cygnes noirs à la BNF,
conférences *Un texte, un mathématicien.*
30 avril 2014.

Sur le calcul des probabilités, notes d'exposé

1 Petite introduction

Paradoxe des anniversaires. Prendre le pari. Expliquer la formule

$$\mathbf{Proba}\,(\text{deux parmi } n \text{ ont le même anniversaire}) = 1 - \frac{365(365-1)(365-2)\ldots(365-n+1)}{365^n}$$



et montrer la courbe jointe. Modèle simplificateur de l'équirépartition des anniversaires et de l'indépendance. Très différent de la question de mesurer la probabilité que deux élèves donnés aient le même anniversaire.

Incursion dans la vie courante de ce genre de phénomène à propos d'événements rares. Exemple des cinq crashes aériens en 22 jours, en août 2005. Inviter à lire le livre de Janvresse et de la Rue *La loi des séries, hasard ou fatalité ?*, éditions Le Pommier.

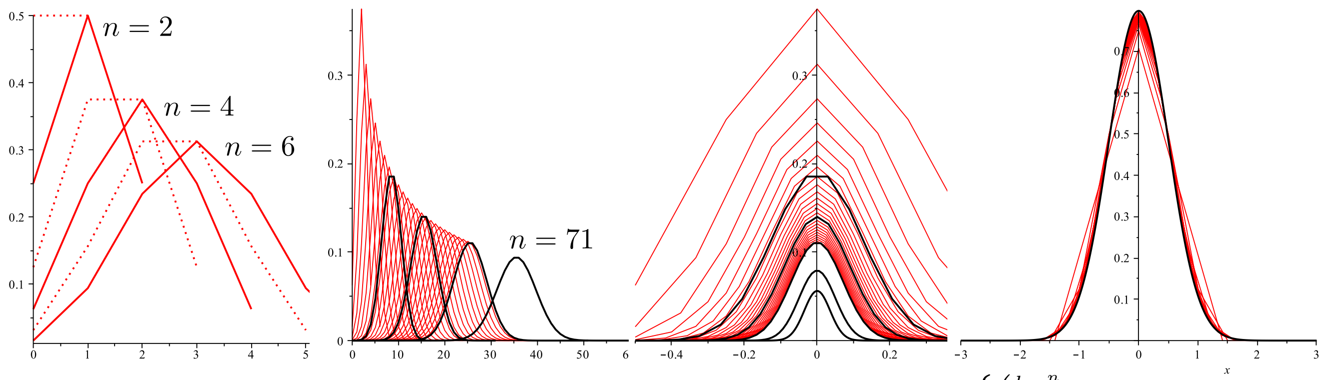
Loto : tirer 6 numéros au hasard parmi 49. La probabilité que la grille que j'ai jouée gagne est à peu près un quatorze-millionnièmes. La petitesse de ce nombre parle peu. Le dire en suggérant de jouer toujours la grille 123456 qui a la même chance de gagner que n'importe quelle autre grille (*équirépartition*). Semble beaucoup plus improbable (les mathématiciens ne jouent pas au loto !).
Autre aspect : si le 31 n'est pas sorti depuis un an, ai-je intérêt à le jouer ? Non, notion d'*indépendance* des tirages (soigneusement organisée par l'organisateur du jeu).

Autres friandises : le jeu de la chèvre et des trois portes. Notion d'information donnée, de *conditionnement*, qui modifie le calcul de la probabilité d'un événement.

Indépendance, conditionnement, distribution (uniforme ou non, comme si on pondérait une moyenne), autant de notions qui ont un sens très précis dans la théorie des probabilités. Cette dernière est une branche entière des mathématiques. Premiers pas : Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Christian Huygens au XVI$^{\text{ième}}$ siècle. Fondements de la théorie moderne : Andreï Kolmogorov (1903 – 1987).

2 La distribution gaussienne

Pile ou face, gain 0 ou 1. Modèle : jets indépendants et équidistribués $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On note S_n la somme des gains après n jets.
Distribution des gains après 1, 2, 3, 4 (oh, Pascal !)... Dessins.



$\{(k, \mathbf{Proba}(S_n = k))\}$ $\{(k, \mathbf{Proba}(S_n = k))\}$ $\left\{\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}, \mathbf{Proba}(S_n = k)\right)\right\}$ $\left\{\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\,\mathbf{Proba}(S_n = k)\right)\right\}$

Le diagramme des probabilités des gains, une fois renormalisé, converge vers une courbe en forme de cloche, qui et ici le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$ (pour les élèves de terminale).
Deux phénomènes :
(i) la moyenne du gain après le $n^{\text{ième}}$ jet est $n/2$ (les moyennes s'ajoutent). On montre en fait qu'avec probabilité 1, la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge vers $1/2$ (ou comment de l'incertitude du hasard émerge une certitude, à relier aux anniversaires ou aux crashes aériens).
(ii) pour passer du troisième dessin au quatrième, pour chaque n, on multiplie les abscisses et les ordonnées des points de la courbe par $\sqrt{n}$. Ce que le dessin illustre, c'est que pour tous réels a et b tels que $a < b$, la probabilité pour que le nombre $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)$ soit compris entre a et b converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers l'aire comprise sous la courbe entre les droites verticales d'abscisses respectives a et b.

On montre en fait que lorsqu'on remplace les jets de pile ou face et les gains 0 ou 1 par des jets indépendants de n'importe quel nombre aléatoire selon toujours la même loi de probabilité donnée (qui ait une moyenne), alors la somme des n premiers gains divisée par n converge, avec probabilité 1, vers la moyenne de la distribution. On appelle ce théorème ***la loi forte des grands nombres***.
La propriété de convergence de la probabilité que $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \text{moyenne}\right)$ converge vers une courbe gaussienne (dont l'équation est du type $y = \alpha \times \exp(-\beta x^2)$) se généralise encore en remplaçant le jet de pile ou face et le gain de 0 ou 1 par une autre distribution de probabilités (pas trop vache). Ce théorème – qui affine la loi forte des grands nombres – est appelée ***théorème de la limite centrale***.

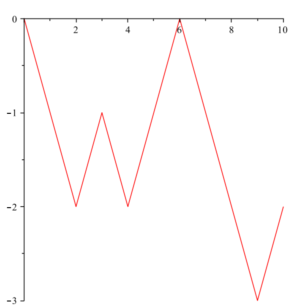
Loi gaussienne (ou normale) centrée réduite.
Décrite par la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right)$.
Distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$. Tirer un nombre réel au hasard. Pour tout x, la probabilité de tirer x est nulle (infinité de nombres).
Distributions continues. Probabilité que le nombre au hasard tombe dans un intervalle donné $[a, b]$ est l'aire sous la courbe. Marche si l'aire totale est 1.
Exemple de fonctions sur $[1, +\infty[$ pour laquelle l'aire sous le graphe est finie : $x \mapsto 1/x^2$. Aussi, $x \mapsto \exp(-x)$ sur $\mathbb{R}_+$. On démontre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Le théorème de la limite centrale rend la loi gaussienne omniprésente dans la description des phénomènes naturels. La "courbe en cloche" apparaît souvent dans les études statistiques. Par exemple, dessiner l'histogramme des notes en mathématiques au baccalauréat de tous les élèves de terminale de France. A vrai dire, l'omniprésence dans les données statistiques de la loi de Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855) renseigne plutôt sur l'indépendance de ce que l'on mesure entre les individus, et sur la relativement faible variabilité des données d'une observation à l'autre (degré de vacherie de la distribution de base). Par exemple, on peut penser que les résultats au bacc d'un élève de Nanterre ne sont pas corrélés à ceux d'un élève de Grenoble. En outre, une note entre 0 et 20 n'est pas sujette à de trop grandes variations.

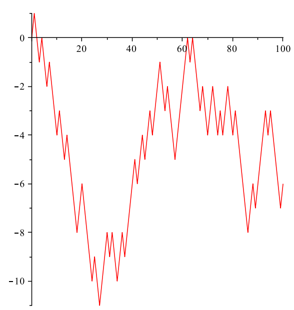
3 Loi normale et mouvement brownien

3.1 De pile ou face au mouvement brownien

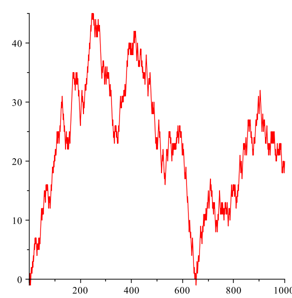
On jette toujours à pile ou face, mais les gains sont maintenant de -1 ou de 1 selon le tirage. On fait n tirages successifs indépendants et on trace le graphe (aléatoire) des gains $\{(k, S_k),\ 0 \leq k \leq n\}$ (on relie les points par des segments). On obtient des dessins qui ressemblent aux suivants.



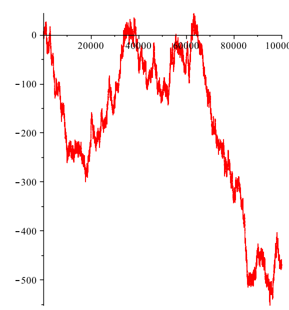
$n = 10$



$n = 100$



$n = 1000$



$n = 10^5$

La trajectoire ressemble à celle d'un *mouvement brownien*, qui emprunte son nom au naturaliste Robert Brown (1773 - 1858). On parle aussi de processus de Wiener (Norbert Wiener, 1894 – 1964), qui en donna une définition dans le champ mathématique. Cet objet un peu compliqué est devenu incontournable dans les probabilités contemporaines, mais aussi dans des champs mathématiques connexes, en physique statistique, en biologie, en économie,...

Emergence historique. Observation de grains de pollen. Particule en interaction (chocs) avec des particules en mouvement. Trajectoire erratique.

Théorème de Monroe David Donsker (1925 – 1991) : lorsque n tend vers l'infini, le dessin que l'on obtient est celui d'un mouvement brownien.

Quelques propriétés qui le décrivent en partie :
- graphe d'une fonction continue aléatoire $[0,1] \to \mathbb{R}$ (il faudrait en dire davantage sur "tirer une fonction au hasard") ; elle n'est ("presque sûrement") dérivable en aucun point de $[0,1]$;
- lorsqu'on fait un tirage au hasard d'une telle trajectoire, la distribution de l'ordonnée du point d'abscisse t est une loi normale dont la variance est t (comme plus haut, calcul des aires sous la courbe d'équation $y = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t^2}\right)$) ;
- mieux, la trajectoire entre les points d'abscisses s et $t > s$ ne dépend pas de la trajectoire avant s, et la distribution de l'ordonnée en t sachant l'ordonnée en s est encore une loi normale, dont la variance est $t - s$ (sa moyenne est l'ordonnée au point s). Dessins.

3.2 Du comptage des arbres au mouvement brownien

On compte les arbres binaires : 1, 2, 5, 14, 42,.... On peut faire le calcul ; on trouve (pour les terminale) que le nombre d'arbres binaires plongés et enracinés ayant n nœuds internes est $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (nombres de Catalan (Eugène Charles Catalan, 1814 – 1894)). Si on tire un arbre au hasard uniformément parmi tous les arbres de taille n, la probabilité de tomber sur un arbre donné est $1/C_n$.

Parcours en profondeur de l'arbre. Bijection entre ces arbres binaires et les chemins de Dyck (Walther Franz Anton von Dyck, 1856 – 1934) ; la réciproque se montre avec de la colle.

On peut faire pousser un arbre de la façon suivante : à chaque pas de temps, indépendamment les unes des autres et indépendamment des tirages précédents, chaque feuille donne naissance à deux nouvelles feuilles avec probabilité 1/2, ou reste sans descendance avec probabilité 1/2. On montre que cette distribution du hasard dans le tirage des arbres de taille n est la même que la distribution obtenue, du côté des chemins, en procédant à n tirages à pile ou face comme plus haut. Cela relie la croissance de ces arbres au mouvement brownien (ou plus exactement à sa cousine nommée excursion brownienne), *via* le théorème de Donsker.

Intérêt en informatique théorique. Par exemple, évaluation du "coût" de certains algorithmes.

4 D'autres lois continues "naturelles"

Lois stables. Les lois normales en sont. Elles apparaissent comme limites normalisées de sommes d'expériences aléatoires indépendantes tirées sous la même distribution de probabilité, lorsqu'on accepte que cette distribution soit vache (variance infinie, ou même moyenne infinie, par exemple).
Elles ont été développées en premier par Paul Lévy (1886 – 1971). Elles feront grandement l'objet de la conférence de Gérard Ben Arous.