UVSQ 2025/2026
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA621 (analyse complexe)

Analyse complexe : notes de cours

Table des matières

1 Le théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes **2**
1.1 Dérivation au sens complexe . . . 2
1.1.1 Dériver au sens complexe . . . 2
1.1.2 Eléments de connexité . . . 4
1.2 Formule de Cauchy . . . 7
1.2.1 Chemins et lacets, support . . . 7
1.2.2 Homotopie des chemins . . . 10
1.2.3 Intégrale le long d'un chemin . . . 13
1.2.4 Indice d'un point par rapport à un lacet . . . 17
1.2.5 Vérifier la formule de Cauchy . . . 18
1.3 Fonctions développables en séries entières . . . 19
1.3.1 Mémento sur les séries entières . . . 19
1.3.2 Fonctions DSE . . . 24
1.4 Le théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes . . . 26

2 Différentiabilité, Cauchy-Riemann, prolongement analytique **30**
2.1 Dérivées complexes d'ordres supérieurs . . . 30
2.2 Prolongement analytique . . . 31
2.3 Le théorème de Liouville . . . 32
2.4 Différentiabilité en 2 variables, équations de Cauchy-Riemann . . . 33
2.4.1 Les applications $\mathbb{C}$-linéaires, ou similitudes directes planes . . . 33
2.4.2 Les équations de Cauchy-Riemann . . . 35
2.4.3 Angles infinitésimaux . . . 36
2.5 Le principe du module maximum . . . 37
2.6 Suites de fonctions holomorphes, intégrales à paramètres . . . 39

3 Le théorème de Cauchy global **43**

4 La question des primitives et du relèvement de l'exponentielle **48**
4.1 Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe . . . 48
4.2 Relèvement de l'exponentielle, logarithmes . . . 50
4.3 Relèvement des puissances, fonctions racines carrées, cubiques, etc . . . 52
4.4 Inversion locale holomorphe, théorème de l'application ouverte . . . 54
4.5 Automorphismes du disque et du demi-plan . . . 59

5 Séries de Laurent, formule des résidus **62**
5.1 Séries de Laurent, fonctions analytiques dans une couronne . . . 62
5.2 Points singuliers, fonctions méromorphes . . . 66
5.2.1 Points réguliers . . . 67
5.2.2 Pôles, fonctions méromorphes . . . 67
5.2.3 Points singuliers essentiels . . . 69
5.3 Le théorème des résidus . . . 70
5.4 Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus . . . 72
5.5 Un exemple de transformation conforme . . . 75

1 Le théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes

Trois grands points de vue sur les fonctions complexes de la variable complexe s'avèrent être équivalents : le point de vue de la dérivation au sens complexe, celui du développement en séries entières et enfin celui de la formule (locale et circulaire) de Cauchy qui relie la valeur d'une fonction en un point à des intégrales curvilignes sur des cercles entourant ledit point. Dans ce chapitre, on étudie séparément les trois aspects et on prouve ensuite leur équivalence, qui fonde la définition et la puissance opératoire des fonctions *holomorphes* — dites aussi *analytiques complexes*.

1.1 Dérivation au sens complexe

Dans tout ce texte, si $c \in \mathbb{Z}$ et si $r \geq 0$, on note

$$D\,(c, r) = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z - c| < r\}$$

le *disque ouvert de centre* c *et de rayon* r et

$$\overline{D}\,(c, r) = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z - c| \leq r\}$$

son adhérence pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}$, qui est le *disque fermé de centre* c *et de rayon* r.

Exercice 1
A propos de la cohérence du vocabulaire : si $r > 0$, montrer que le disque ouvert de centre c et de rayon r est un ouvert de $\mathbb{C}$ dont l'adhérence est le disque fermé de centre c et de rayon r.

1.1.1 Dériver au sens complexe

Définition (fonction dérivable au sens complexe)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. Pour tout $z_0 \in U$, on dit que f est *dérivable au sens complexe en* z_0 ou *dérivable (tout court) en* z_0 lorsqu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = f\,(z_0) + a\,(z - z_0) + o\,(z - z_0) \tag{1}$$

lorsque z tend vers z_0 — le o est la notation *petit o* de Landau[♫]. Lorsque f est dérivable au sens complexe en tout point de U, on dit que f est *dérivable au sens complexe sur* U.

Exercice 2
Avec les notations de la définition, si f est dérivable en z_0, alors il existe un *unique* nombre complexe a qui vérifie (1).

Définition (fonction dérivée)
Avec les notations de la définition précédente, si f est dérivable en z_0, l'unique nombre a qui vérifie (1) est appelé *nombre dérivé de* f *en* z_0 ; on le note $f'\,(z_0)$. Lorsque f est dérivable sur U, l'application $f' : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ est la *fonction dérivée de* f. On note aussi indifféremment

$$f' = \frac{df}{dz} = \partial f.$$

A noter
(i) Dans les conditions de la définition, f est dérivable en z_0 et admet $a \in \mathbb{C}$ comme nombre dérivé en z_0 si, et seulement si

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f\,(z) - f\,(z_0)}{z - z_0} = a.$$

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall z \in U,\ z \in D\,(z_0, \eta) \implies |f\,(z) - f\,(z_0) - a\,(z - z_0)| \leq \varepsilon\,|z - z_0|$.

(ii) Bien sûr, *toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.* Noter que cet énoncé, s'il est vrai, n'a pas grand intérêt : quel sens cela aurait-il de se poser la question de la dérivabilité en un point d'une application non continue en ledit point ?

[♫] Edmund Landau, 1877–1938

Exemples

(i) Les règles opératoires de la dérivation des fonctions réelles de la variable réelle sont encore valides pour la dérivation au sens complexe. Notamment, sans entrer dans le détail des notations évidentes, la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$. En particulier, toute fonction rationnelle est dérivable hors de ses pôles, avec les formules usuelles de dérivation.

(ii) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions complexes dérivables sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On suppose que A est une partie de U sur laquelle la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application $g : A \to \mathbb{C}$ et sur laquelle la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Alors g est dérivable en tout point de A et $f_n'(z)$ tend vers $g'(z)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

Cette assertion s'étend bien sûr au cas des séries de fonctions. Dans ce cadre, on retiendra le cas des séries de fonctions dérivables dont la série des dérivées converge normalement — donc uniformément — sur A.

Ces énoncés généralisent les théorèmes standard de dérivation des limites (ou des sommes) de fonctions dérivables de la variable réelle, dont les preuves s'adaptent immédiatement. En particulier, la convergence *uniforme sur tout compact* de U de la suite des dérivées permet de conclure à la dérivabilité de la limite, puisque la dérivabilité est une notion locale — prendre pour A n'importe quel compact de U, ou encore les éléments d'une suite de compacts dont la réunion recouvre U.

Cela dit, on le verra plus bas, la dérivation des limites de fonctions dérivables *au sens complexe* fait l'objet d'énoncés dont les hypothèses sont plus faibles : il suffit que la suite de fonctions dérivables converge uniformément sur une partie A pour que la limite soit dérivable sur A et pour que la limite de la dérivée soit la dérivée de la limite. L'ingrédient essentiel de cette simplification des hypothèses est la formule de Cauchy[♫].

(iii) *Une fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ définie par une série entière de rayon $R > 0$ est dérivable sur son disque de convergence $D(0,R)$, et la dérivation se fait terme à terme : $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$, pour tout $z \in D(0,R)$.*

En effet, la série des dérivées est une série entière de même rayon R. Elle converge donc normalement sur tout disque fermé contenu dans $D(0,R)$: on peut appliquer le théorème de dérivation des séries au voisinage de chaque point de $D(0,R)$, puisque tout point de $D(0,R)$ est contenu dans un disque fermé $\overline{D}(0,r)$, $0 < r < R$, lui-même contenu dans $D(0,R)$ — on pourra se référer au mémento sur les séries entières.

Exercice 3

Démontrer avec soin toutes les assertions ci-dessus.

Proposition (l'exponentielle)

La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, définie par la somme de la série entière de rayon infini*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est dérivable au sens complexe, et $\exp'(z) = \exp(z)$*, pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Preuve. Elle est dérivable au sens complexe en tant que fonction entière — une *fonction entière* est une fonction définie par une série entière de rayon infini. Sa dérivée, qui se calcule donc terme à terme, est $\exp'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{(n+1)!} z^n = \exp(z)$, selon le (iii) des *Exemples* ci-dessus. [Lire, pour davantage de détails, les toutes premières pages du livre *Real and complex analysis* de Walter Rudin, qui sont entièrement et brillamment consacrées à l'exponentielle.] ∎

Exemples

Les fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques sont aussi dérivables sur $\mathbb{C}$. Elles vérifient les formules valides pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sinh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

[♫] Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh' = \sinh, \ \ \sinh' = \cosh, \ \ \cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos .$$

Exercice 4
Démontrer les célèbres formules valables pour tous $x, y \in \mathbb{C}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{array}\right.$$

En inventer d'autres — jouer sur la parité de ces fonctions, écrire $\cosh nz$ en fonction de $\cosh x$ et de $\sinh x$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, trouver des formules faisant intervenir $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$ et $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, etc. On pourra économiser sa peine en notant que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \cosh(iz)$ et $\sin z = -i \sinh(iz)$.

1.1.2 Eléments de connexité

Exercice 5
Soient $U = D(-2,1) \cup D(2,1)$ et $f : U \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in D(-2,1)$, $f(z) = 0$ et $\forall z \in D(2,1)$, $f(z) = 1$. Dessiner U. Montrer que f est continue et même dérivable, et que $f'(z) = 0$, pour tout $z \in U$ — pourtant, f n'est pas constante.

Définition (connexité d'une partie de $\mathbb{C}$)
Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On dit que A est *connexe* lorsque A ne rencontre pas deux ouverts disjoints et non vides dans la réunion desquels il est inclus. Autrement dit, A est connexe si, et seulement si pour tous U, V ouverts non vides de $\mathbb{C}$,

$$\Big(A \subseteq U \cup V \text{ et } U \cap V = \emptyset\Big) \Longrightarrow \Big(A \subseteq U \text{ ou } A \subseteq V\Big).$$

A noter
C'est la formalisation de l'idée d'une partie "en un seul morceau". Ce que l'on dit ici sur la connexité est loin de faire le tour de la notion. Il s'agit d'introduire le concept et d'en dégager les premiers mécanismes opératoires. En particulier, la notion de topologie induite, qui permet pourtant de bien asseoir la connexité et de simplifier les raisonnements, est absente du présent discours.

Exemples
(i) L'ensemble vide et $\mathbb{C}$ sont connexes (sans blague !).
(ii) L'union $D(-2,1) \cup D(2,1)$ n'est pas connexe.

Proposition (caractérisation de la connexité)
Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) A est connexe
(ii) Toute application continue $A \to \{0,1\}$ est constante.

Preuve. Si A est vide, il n'y a pas grand chose à montrer ; on suppose que A n'est pas vide.
$(i) \Rightarrow (ii)$, par contraposition : on suppose qu'une application continue $f : A \to \{0,1\}$ n'est pas constante. On note $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$; ce sont deux parties disjointes de $\mathbb{C}$ dont la réunion contient A — et même égale A. Puisque f n'est pas constante, U et V sont non vides et A n'est inclus ni dans U ni dans V. Par ailleurs, comme $U = f^{-1}\left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$ et $V = f^{-1}\left(D\left(1, \frac{1}{2}\right)\right)$, en tant qu'images inverses d'ouverts par une application continue, U et V sont deux ouverts de $\mathbb{C}$. On a trouvé deux ouverts non vides disjoints qui, chacun, rencontrent A : on a montré que A n'est pas connexe.
$(ii) \Rightarrow (i)$ On suppose que toute application continue $A \to \{0,1\}$ est constante. Soient U et V deux ouverts disjoints non vides de $\mathbb{C}$ tels que $A \subseteq U \cup V$. Soit $f : A \to \{0,1\}$ l'application définie par $f(a) = 0$ si $a \in U$ et $f(a) = 1$ si $a \in V$; noter que cette application n'est bien définie que parce que U et V sont disjoints. On montre que f est continue sur A. Soit $a \in A$. Puisque $A \subseteq U \cup V$, on suppose pour commencer que $a \in U$. Comme U est ouvert, soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subseteq U$. Alors, $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(a,r) \cap A$; en particulier, $|f(z) - f(a)| = 0 \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (!). Cela montre que f est continue en a. De la même façon, si $a \in V$,

on montre que f est continue en a : on a montré que f est continue sur A. En appliquant l'hypothèse, on en déduit que f est constante, ce qui montre que $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$. ■

Exercice 6
Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$ ayant au moins deux éléments. Montrer que A est connexe si, et seulement si toute application continue $A \to F$ est constante.

Exercice 7
Montrer que si U et V sont deux parties connexes non disjointes, alors $U \cup V$ est encore connexe.

Corollaire (l'intervalle $[0,1]$ est connexe)
L'intervalle $[0,1]$ est connexe.

Preuve. En effet, soit $f : [0,1] \to \{0,1\}$ une application continue. Quitte à remplacer f par $1-f$, on peut supposer que $f(0) = 0$. Alors, $\{x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$: elle admet une borne supérieure. On note $m = \sup\{x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$. Puisque f est continue, $f(m) = 0$. On suppose que $m < 1$; alors, $f(x) = 1$ pour tout $x \in]m,1]$ ce qui entraîne, toujours par continuité de f, que $f(m) = 1$ empêchant l'hypothèse $m < 1$ de tenir. Ainsi, $m = 1$ et f est la fonction constante égale à 0 sur $[0,1]$: on a montré que $[0,1]$ est connexe. ■

Proposition (théorème des valeurs intermédiaires)
Si $A \subseteq \mathbb{C}$ est connexe et si $f : A \to \mathbb{C}$ est continue, alors $f(A)$ est connexe.

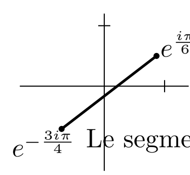
Preuve. Soit $c : f(A) \to \{0,1\}$ une application continue. Alors, $c \circ f : A \to \{0,1\}$ est aussi continue, donc constante puisque A est connexe. Donc c est constante. ■

Le slogan : *l'image continue d'un connexe est encore connexe.*

Exercice 8
Pourquoi appeler ce théorème "théorème des valeurs intermédiaires" alors qu'un théorème du même nom est connu depuis le lycée, dont l'énoncé ne ressemble pas tout à fait à celui-ci ?

Définition (segment de $\mathbb{C}$) Si $a, b \in \mathbb{C}$, le *segment* $[a,b]$ est $[a,b] = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\}$.

A noter
Dans le plan complexe, $[a,b]$ est la portion de droite (réelle) comprise entre a et b, ces deux points étant inclus. On peut voir le point $(1-t)a + tb$ comme le barycentre de a et b affecté des poids respectifs $1-t$ et t. Considérer par exemple le milieu de $[a,b]$, atteint lorsque $t = \frac{1}{2}$.



Le segment $\left[e^{-\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{i\pi}{6}}\right]$

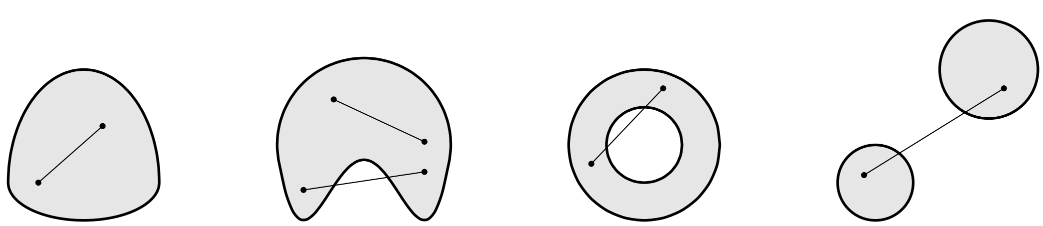
Exercice 9
Définir, dans la même veine, ce que seraient $]a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b[$, lorsque $a \neq b$.

Exercice 10
Tout segment est connexe — le voir comme image continue du connexe $[0,1]$.

Définition (partie convexe de $\mathbb{C}$)
Soit $C \subseteq \mathbb{C}$. On dit que C est *convexe* lorsque $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$x, y \in C \Longrightarrow [x,y] \subseteq C.$$

A noter
C'est l'idée d'une partie "sans concavité". Une métaphore : A est convexe lorsque de tout point de A, on peut voir tous les points de A. Dans les dessins sans paroles ci-dessous, un haricot n'est pas convexe, une couronne non plus, deux disques disjoints non plus.

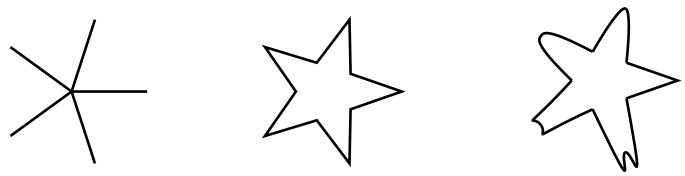


Exercice 11
Les disques du plan complexe sont convexes.

Définition (partie étoilée de $\mathbb{C}$)
Soit $E \subseteq \mathbb{C}$. On dit que E est *étoilée* lorsqu'il existe $c \in E$ tel que $\forall x \in \mathbb{C}$,

$$x \in E \Longrightarrow [c, x] \subseteq E.$$

A noter
Le vocabulaire parle de lui-même : il existe un point de E d'où l'on voit tous les points de E. On appellera un tel point un *centre* de l'étoilé. Voici quelques dessins sans paroles d'étoilés de $\mathbb{C}$. Bien sûr, tout convexe non vide est étoilé.



Proposition (Les disques, les convexes et les étoilés sont connexes)
(i) Tout disque de $\mathbb{C}$ est connexe.

(ii) Soit C une partie convexe de $\mathbb{C}$. Alors, C est connexe.

(iii) Soit E une partie étoilée de $\mathbb{C}$. Alors, E est connexe.

Preuve. Il suffit de montrer que tout étoilé est connexe, puisque les disques sont convexes et les convexes sont étoilés. Soit ainsi E une partie étoilée et c un centre de E, c'est-à-dire une point de E qui vérifie : $\forall x \in E$, $[c, x] \subseteq E$. Soit aussi $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Quitte à remplacer f par $1 - f$, on peut supposer que $f(c) = 0$. Soit $x \in E$. La restriction de f au segment $[c, x]$ est encore continue ; puisque $[c, x]$ est connexe, alors f est constante sur ce segment : $f(x) = f(c) = 0$. Ainsi, $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$: on a montré que E est connexe. ∎

Proposition (fonctions à dérivée nulle)
Soient U un ouvert connexe *de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application dérivable. On suppose que $f'(z) = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, f est constante sur U.*

Preuve. ① On montre d'abord que *pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) = f(x)$ pour tout $z \in D(x, r)$.* Soit $x \in U$. Puisque U est ouvert, soit $r > 0$ tel que $D(x, r) \subseteq U$. Soit alors $y \in D(x, r)$. L'application $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est une fonction dérivable de la variable réelle (à valeurs complexes), bien définie puisque $D(x, r)$ est un convexe inclus dans U. En outre, $\varphi'(t) = (y - x)f'((1-t)x + ty) = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$. Alors, en tant que fonction à dérivée nulle sur un intervalle, φ est constante — c'est une conséquence de la célèbre inégalité des accroissements finis. En particulier, $\varphi(0) = \varphi(1)$, ce qui s'écrit encore $f(x) = f(y)$. On a montré que f est constante sur $D(x, r)$.
② Fin de la preuve. Si U est vide, c'est idiot. On suppose que U est non vide ; soit $x \in U$. Soient alors $V = \{z \in U,\ f(z) = f(x)\}$ et $W = \{z \in U,\ f(z) \neq f(x)\}$. Alors, V n'est pas vide (il contient x) et $U = V \cup W$. Comme f est localement constante — c'est ce qu'on vient de montrer en ① —, V est ouvert. Par ailleurs, puisque f est continue (elle est même dérivable), $W = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{f(x)\})$ est également ouvert. Comme U est connexe, cela impose que $W = \emptyset$, c'est-à-dire que f est constante, égale à $f(x)$ sur U. ∎

A noter
Une application $f : U \to \mathbb{C}$ est dite *localement constante* lorsque pour tout $u \in U$, il existe $r > 0$ tel que f soit constante — nécessairement égale à $f(u)$ — sur $U \cap D(u, r)$. Une façon de décrire la preuve : on montre qu'une application de dérivée nulle est localement constante, ce qui implique qu'elle est constante puisque U est connexe.

Exercice 12 (composantes connexes)
Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On définit sur A la relation binaire suivante : $a \sim b$ si, et seulement s'il existe une partie connexe de A qui contienne à la fois a et b.

(i) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur A.

(ii) Les classes d'équivalences de $\sim$ sont appelées les *composantes connexes* de A. Les composantes connexes de A formalisent l'idée des "morceaux" de A. Montrer que si E est un ensemble, toute application $A \to E$ localement constante sur A est constante sur chaque composante connexe de A.

(iii) Montrer qu'une application $A \to \{0, 1\}$ est localement constante si, et seulement si elle est continue.

1.2 Formule de Cauchy

1.2.1 Chemins et lacets, support

Définition (chemin et lacet)
Un *chemin* est une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et dont la dérivée est bornée, où a et b sont des nombres réels, $a < b$. Autrement dit, une telle application γ est un chemin lorsqu'elle est continue et lorsqu'il existe un entier naturel n et des nombres réels $c_0, \dots c_{n+1}$ tels que $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n < c_{n+1} = b$, la restriction de γ à chaque intervalle $]c_k, c_{k+1}[$ est continûment dérivable et il existe $M > 0$ tel que $|\gamma'(t)| \leq M$, pour tout $t \in [a, b] \setminus \{c_0, \dots c_{n+1}\}$. Les nombres $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont les *bouts* du chemin ; s'il faut détailler, on dira que $\gamma(a)$ est l'*origine* du chemin et $\gamma(b)$ son *extrémité*.
Avec ces notations, lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que le chemin est un *lacet*. Autrement dit, un lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
Le *support* d'un chemin est son image ; on le note $\mathrm{Supp}(\gamma) = \gamma([a, b])$.

A noter
(i) L'hypothèse sur le caractère borné de la dérivée d'un chemin assure qu'un chemin est un *arc rectifiable*, ce qui signifie qu'il a une longueur finie. Plus précisément, avec les notations de la définition, lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$, on définit la *longueur de* γ comme étant le nombre

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt. \tag{2}$$

Dans le cas général des chemins, avec les notations de la définition, la longueur de γ est

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

Bien sûr, on a toujours la majoration grossière $\mathrm{Long}(\gamma) \leq M(b - a)$.

(ii) De façon plus générale, un chemin de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, est une application continue $[a, b] \to \mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à dérivée bornée. Sa longueur est alors $\displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2\, dt$.

Exercice 13
Montrer, en approchant un arc par des lignes polygonales et en utilisant l'intégrale au sens de Riemann♫, que l'intégrale de la formule (2) correspond bien à ce que l'on attend de la longueur d'un chemin (exercice long, à documenter à partir d'un livre ou d'un autre texte de référence s'il le faut).

Exemples
(i) **Cercles et arcs de cercles**
Si $c \in \mathbb{C}$ et si $r \geq 0$, le cercle de centre c et de rayon r est $\{z \in \mathbb{C},\ |z - c| = r\}$. Un paramétrage du "cercle de centre c, de rayon r, parcouru une fois dans le sens direct" est le chemin (c'est un lacet)

$$\boxed{C(c, r)} : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & c + re^{it}. \end{array} \tag{3}$$

De façon générale, si $\theta_1 \leq \theta_2$, le chemin $[\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto c + re^{it}$ est un paramétrage de l'arc de cercle de centre c et de rayon r compris entre les angles (orientés) θ_1 et θ_2, parcouru dans le sens direct.

♫Bernhard Riemann, 1826–1866

Les lacets suivants ont le même support :

(a) $t \in [0, 2\pi] \mapsto c + re^{-it}$ qui est le “cercle de centre c, de rayon r, parcouru une fois dans le sens indirect”

(b) $t \in [0, 4\pi] \mapsto c + re^{it}$ qui est le “cercle de centre c, de rayon r, parcouru deux fois dans le sens direct”

(ii) **Segments**

Si $u, v \in \mathbb{C}$, le segment $[u, v]$, on l’a vu, est $\{(1-t)u + tv,\ t \in [0, 1]\}$. Un paramétrage du “segment d’origine u et d’extrémité v” est le chemin

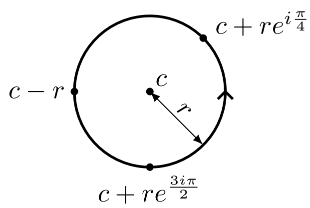
$$\boxed{S(u,v)} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (1-t)u + tv = u + t(v-u). \end{array} \tag{4}$$

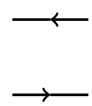
De la même façon, le chemin $S(v, u)$ est un paramétrage du “segment d’origine v et d’extrémité u”.

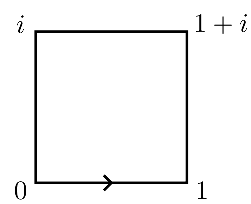
(iii) Un paramétrage du carré unité parcouru une fois dans le sens direct est le chemin $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ défini par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \text{ si } 0 \le t \le 1 \\ 1 + i(t-1) \text{ si } 1 \le t \le 2 \\ 1 + i - (t-2) \text{ si } 2 \le t \le 3 \\ i - i(t-3) \text{ si } 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

(iv) Sans parole.







Exercice 14

Avec la notion (définitive) de longueur établie au (i) du *A noter* de la page 7, calculer le périmètre d’un disque de rayon r.

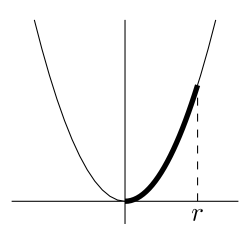
Exercice 15

Exprimer la longueur de l’ellipse de grand axe a et de petit axe b, où $0 < b < a$, sous la forme d’une intégrale. Cette ellipse, lorsqu’elle a l’origine pour centre et lorsque ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées, est $\left\{(x, y),\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. Un paramétrage de cette ellipse “parcourue une fois dans le sens direct” en est le chemin $t \in [0, 2\pi] \mapsto a \cos t + ib \sin t$.

Une forme possible de l’écriture de cette longueur est $a \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}dt$ où $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ est l’*excentricité* de l’ellipse. Ne pas chercher, lorsque $a \neq b$, à calculer cette intégrale en cherchant une primitive de l’intégrand qui s’exprimerait à l’aide de fonctions usuelles. Une telle primitive n’existe pas, c’est un théorème qui dépasse le cadre de ce cours. Dans le jargon consacré, on tombe sur une *intégrale elliptique* (c’est malin !).

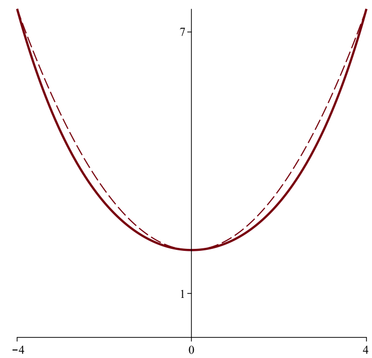
Exercice 16

Si $r > 0$, calculer la longueur de la portion de parabole d’équation $y = x^2$ comprise entre les points d’abscisses 0 et r (petit exercice de calcul de primitives).



Exercice 17

Calculer la longueur de la célèbre *chaînette*, graphe de l'application $[-a, a] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto r \cosh\left(\frac{x}{r}\right)$ où $a, r > 0$. La chaînette est, selon le modèle étudié dans le courant du XVII$^{\text{e}}$ et devenu standard, la courbe que suit un câble pendu par ses extrémités et soumis à son seul propre poids — le paramètre r est une constante qui dépend des caractéristiques physiques du câble, on voit ce que représente a. Dans le dessin ci-contre, $a = 4$ et $r = 2$. En pointillés, est dessiné le graphe de la parabole passant par les bouts et le sommet de la chaînette. On a pu croire un temps, à tort, dans l'histoire des sciences, avant d'avoir développé le calcul infinitésimal, que le câble prenait la forme de cette parabole.



Définition (chemins équivalents, changement de paramétrage)
Soient $\gamma_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [c, d] \to \mathbb{C}$ deux chemins. On dit que γ_0 et γ_1 sont *équivalents* (on ajoute parfois *et de même orientation*) lorsqu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ croissant tel que $\gamma_0 = \gamma_1 \circ \varphi$. On dit parfois que φ est un *changement (croissant) de paramètre* dans le chemin γ_1.

A noter

(i) Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre $[a, b]$ et $[c, d]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, dont la réciproque est également de classe $\mathcal{C}^1$. Une application $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ surjective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre $[a, b]$ et $[c, d]$ dès lors que sa dérivée est strictement positive sur $[a, b]$. Dans le contexte de la définition précédente, sa réciproque peut être vue comme un changement de paramètre dans γ_0.

(ii) Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de $\mathbb{C}$.

(iii) Deux chemins équivalents ont le même support. Mieux que cela, en termes cinématiques, deux chemins équivalents parcourent leur support commun en passant et repassant par les mêmes endroits et dans le même sens, mais à des vitesses éventuellement différentes.

(iv) Dans la définition, la croissance sert seulement à assurer que γ_0 et γ_1 ont la même origine et la même extrémité, tout en n'écrivant les intervalles de départ des chemins que sous le forme $[a, b]$ avec $a \leq b$. Par exemple, les chemins $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$ ne sont en général pas équivalents puisqu'ils échangent leurs origines et leurs extrémités.

Définition (chemin standard)
Un *chemin standard* est un chemin dont l'intervalle de départ est $[0, 1]$.

Définition (version standard d'un chemin)
On suppose $a < b$. En composant un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ par la paramétrisation standard $S(a, b) : [0, 1] \to [a, b]$, $t \mapsto (1 - t)a + tb$ du segment $[a, b]$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant, on obtient le chemin $\gamma \circ S(a, b)$ paramétré par $[0, 1]$ qui est la *version standard* de γ.

Définition (concaténation des chemins)

(i) (les intervalles de définitions s'aboutent)
Soient $\gamma_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 = [b, c] \to \mathbb{C}$ deux chemins. On suppose que l'extrémité de γ_0 égale l'origine de γ_1, assavoir $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Le *chemin concaténé de* γ_0 *et* γ_1 est le chemin

$$\begin{array}{rccl} \gamma_0\gamma_1 : & [a, c] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{si} \quad a \leq t \leq b \\ \gamma_1(t) & \text{si} \quad b < t \leq c. \end{cases} \end{array}$$

(ii) (situation générale)
Soient $\gamma_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 = [c, d] \to \mathbb{C}$ deux chemins. On suppose que l'extrémité de γ_0 égale l'origine de γ_1, savoir $\gamma_0(b) = \gamma_1(c)$. La *concaténation de* γ_0 *et* γ_1 est le chemin concaténé de γ_0 et du chemin $[b, b + d - c] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_1(t + c - b)$; on note encore $\gamma_0\gamma_1$.

Exercice 18 L'application $\gamma_0\gamma_1$ est bien un chemin de $\mathbb{C}$.

A noter

(i) Le chemin $\gamma_0\gamma_1$ est la formalisation de l'idée : on parcourt γ_0, puis γ_1, dans cet ordre.

(ii) Si γ_0, γ_1 et γ_2 sont des chemins dont les bouts sont compatibles — dans un sens évident —, on a l'"associativité" $(\gamma_0\gamma_1)\,\gamma_2 = \gamma_0\,(\gamma_1\gamma_2)$. On note alors $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ ce chemin, que l'on pourrait aussi définir directement, sur le mode de la définition de $\gamma_0\gamma_1$, en faisant une disjonction de trois cas selon la valeur de t.

Exercice 19

Ecrire explicitement une paramétrisation de la concaténation $\gamma_0\gamma_1$ de deux chemins $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ tels que $\gamma_0(b) = \gamma_1(c)$.

Lemme (version standard du concaténé de deux chemins standard)

Soient γ_0 et γ_1 deux chemins standard, tels que $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Alors, la version standard du concaténé $\gamma_0\gamma_1$ est l'application

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_0\,(2t) \ \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1\,(2t-1) \ \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{array}$$

Preuve. Il s'agit de concaténer le chemin $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ et le chemin $\widetilde{\gamma_1} : [1,2] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_1(t-1)$, puis de standardiser $\gamma_0\widetilde{\gamma_1} : [0,2] \to \mathbb{C}$. Cette dernière standardisation revient à composer par $S(0,2) : t \mapsto 2t$. ■

1.2.2 Homotopie des chemins

C'est une notion importante pour les affaires de fonctions holomorphes, qui ne sont pas encore définies à ce point mais qui font l'objet de tout le chapitre. Ce que la définition formalise, c'est que deux chemins dans une partie de $\mathbb{C}$ sont homotopes lorsqu'on peut déformer continûment l'un sur l'autre en restant dans la partie et en gardant les bouts fixes.

Définition (chemins homotopes)

(i) (Chemins standard)

Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to A$ deux chemins dont le support est dans A et ayant les mêmes bouts — autrement dit, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. On dit que γ_0 et γ_1 sont *A-homotopes* ou encore *homotopes dans A* lorsqu'il existe une application continue $H : [0,1]^2 \to A$ telle que :

1) $\forall t \in [0,1]$, $H(0,t) = \gamma_0(t)$ — le chemin de départ $H(0,\cdot)$ est γ_0

2) $\forall t \in [0,1]$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$ — le chemin d'arrivée $H(1,\cdot)$ est γ_1

3) $\forall s \in [0,1]$, $H(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $H(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ — tous les "chemins" $H(s,.)$ ont la même origine et la même extrémité.

(ii) (Cas général)

Deux chemins quelconques de A sont dits A-homotopes lorsque leurs versions standard le sont.

A noter

(i) Lorsqu'elle existe, une telle application H est une *(A-)homotopie* entre les chemins γ_0 et γ_1.

(ii) Les guillemets autour du mot *chemin* dans le 3) de la définition viennent du fait qu'on ne suppose pas que les applications $t \mapsto H(s,t)$, $s \in]0,1[$ soient de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

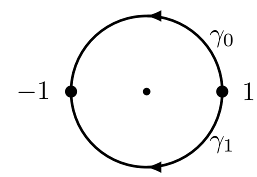
(iii) On peut se représenter les chemins $H(s,\cdot)$ comme des déformations continues de γ_0. A ce titre, dans la notation $H(s,t)$, on peut voir s comme étant la *variable de déformation* (des chemins), la variable t étant la variable de paramétrisation (des chemins déformés).

Exemples

(i) Dans $\mathbb{C}$, on considère les deux chemins γ_0 et γ_1 respectivement définis sur $[0,1]$ par : pour tout $t \in [0,1]$,

$$\gamma_0(t) = e^{i\pi t} \ \text{ et } \ \gamma_1(t) = e^{-i\pi t}.$$

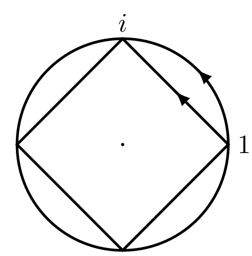
Leurs supports sont respectivement l'hémicercle (unité) nord et l'hémicercle sud. Les chemins γ_0 et γ_1 ont tous les deux 1 pour origine et $-1 = e^{-i\pi}$ pour extrémité. En outre, ils sont $\mathbb{C}$-homotopes. Par exemple, l'application $H(s,t) = (1-s)e^{i\pi t} + se^{-i\pi t}$ est une $\mathbb{C}$-homotopie entre les chemins γ_0 et γ_1 — pour la construire, on a simplement pris pour $H(s,t)$ le barycentre de $\gamma_0(t)$ et de $\gamma_1(t)$ affecté des poids respectifs $1-s$ et s.



En revanche, H ainsi définie n'est pas une $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-homotopie entre les chemins γ_0 et γ_1, puisque $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$: le chemin $H\left(\frac{1}{2}, \cdot\right)$ passe par l'origine. A vrai dire, les chemins γ_0 et γ_1 ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On aura une argumentation très simple de cela une fois l'intégration des fonctions holomorphes le long de chemins mise en place. Cette non-homotopie formalise l'idée que pour déformer continûment le demi-cercle nord sur le demi-cercle sud en fixant l'est et l'ouest, on doit passer par l'origine à un moment.

(ii) On note $Q(0,1)$ le lacet standard qui paramétrise le carré $\{z \in \mathbb{C},\ |\Re z| + |\Im z| = 1\}$ parcouru une fois dans le sens direct à partir de 1, en concaténant les segments $S(1,i)$, $S(i,-1)$, $S(-1,-i)$ et $S(-i,1)$ dans cet ordre — notation (4). On note aussi $CS(0,1)$ le chemin standardisé du cercle $C(0,1)$. Autrement dit, pour tout $t \in [0,1]$,

$$Q(0,1)(t) = \begin{cases} 1 + 4t(i-1) & \text{si } 0 \le t \le 1/4 \\ i + 4\left(t - \frac{1}{4}\right)(-1-i) & \text{si } 1/4 \le t \le 1/2 \\ -1 + 4\left(t - \frac{1}{2}\right)(-i+1) & \text{si } 1/2 \le t \le 3/4 \\ -i + 4\left(t - \frac{3}{4}\right)(1+i) & \text{si } 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$



et $CS(0,1)(t) = e^{2i\pi t}$.
Alors, l'application $H = [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall (s,t),\ H(s,t) = (1-s)Q(0,1)(t) + sCS(0,1)$$

est une $\mathbb{C}$-homotopie entre le carré $Q(0,1)$ et le cercle $CS(0,1)$.

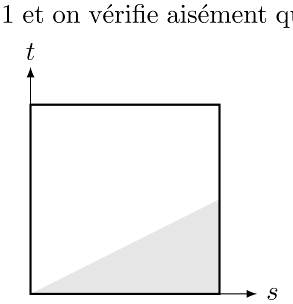
Dans le jargon ordinaire, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira abusivement que *le cercle et le carré sont homotopes*, sans expliciter les détails techniques ci-dessus qui, tout à la fois, apportent un sens précis et une preuve à l'assertion.
Par ailleurs, si D est n'importe que sous-ensemble de l'"intérieur" du carré $\{z \in \mathbb{C},\ |\Re z| + |\Im z| < 1\}$, le raisonnement ci-dessus montre que le cercle et le carré sont aussi $\mathbb{C} \setminus D$-homotopes.

Exercice 20
Montrer que le graphe de n'importe quelle fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ est homotope dans $\mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}^2$) au segment $[a,b]$ — noter, dans cet énoncé, qu'en l'absence d'ambiguïté du contexte, on étend abusivement la notion d'homotopie de deux chemins à celle de leurs supports.

Proposition (les chemins constants sont homotopiquement neutres pour la concaténation)
Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et γ un chemin d'origine u et d'extrémité v. On note $c_u : [0,1] \to A$, $t \mapsto u$ le lacet (standard) constant égal à u. *Alors, les chemins γ et les concaténés $c_u\gamma$ et γc_v sont tous homotopes.*

Preuve. On peut supposer que γ est un chemin standard. Alors, la version standard du concaténé $c_u\gamma$ est l'application $[0,1] \to A$, $t \mapsto u$ si $0 \le t \le \frac{1}{2}$ ou $t \mapsto \gamma(2t-1)$ si $\frac{1}{2} \le t \le 1$ et on vérifie aisément que l'application

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,1]^2 & \longrightarrow & A \\ & (s,t) & \longmapsto & \begin{cases} u \text{ si } 0 \le t \le \frac{s}{2} \\ \gamma\left(\frac{2t-s}{2-s}\right) \text{ si } \frac{s}{2} \le t \le 1 \end{cases} \end{array}$$



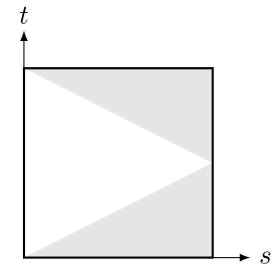
est une A-homotopie de γ vers $c_u\gamma$. Dans la zone grisée du dessin, l'homotopie F est constante égale à u.

Le fait que γ et γc_v soient homotopes est du même acabit. ■

Proposition (un aller-retour est homotope à zéro)
Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to A$ un chemin de A, d'origine $u = \gamma(a)$ et d'extrémité $v = \gamma(b)$. On note γ^{-1} l'application $t \in [a,b] \mapsto \gamma(a+b-t)$. Alors,
(i) γ^{-1} est un chemin de A d'origine v et d'extrémité u, que l'on nomme chemin inverse de γ *;*
(ii) le concaténé $\gamma\gamma^{-1}$ est un lacet homotope au lacet (standard) constant $c_u : [0,1] \to A$, $t \mapsto u$;
(iii) le concaténé $\gamma^{-1}\gamma$ est un lacet homotope au lacet (standard) constant $c_v : [0,1] \to A$, $t \mapsto v$.

Preuve. (i) est immédiat. Pour (ii) et (iii), on peut supposer que γ est standard, c'est-à-dire que $[a,b] = [0,1]$. Alors, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, pour tout $t \in [0,1]$. La version standard de $\gamma\gamma^{-1}$ est $t \mapsto \gamma(2t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ou $t \mapsto \gamma(2-2t)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ et on vérifie aisément que l'application

$$\begin{array}{rccl} F : & [0,1]^2 & \longrightarrow & A \\ & (s,t) & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \gamma(1-s) \text{ si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \gamma(2-2t) \text{ si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$



est une A-homotopie de $\gamma\gamma^{-1}$ vers c_u.
Le fait que $\gamma^{-1}\gamma$ soit homotope à c_v est du même acabit. ■

Exercice 21
Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et soient u et v dans A. Dans l'ensemble de chemins (standards) de A d'origine u et d'extrémité v, montrer que la relation de A-homotopie est une relation d'équivalence. Pour cette relation, la classe d'un chemin est la *classe d'homotopie* dudit chemin.

Proposition (l'homotopie est compatible avec la concaténation)
Soient γ_0, γ_0', γ_1 et γ_1' quatre chemins standard d'une partie A de $\mathbb{C}$. On suppose que
(i) γ_0 et γ_0' sont A-homotopes et que γ_1 et γ_1' sont A-homotopes ;
(ii) l'extrémité commune de γ_0 et γ_0' égale l'origine commune de γ_1 et γ_1'.
Alors, les concaténés $\gamma_0\gamma_1$ et $\gamma_0'\gamma_1'$ sont A-homotopes.

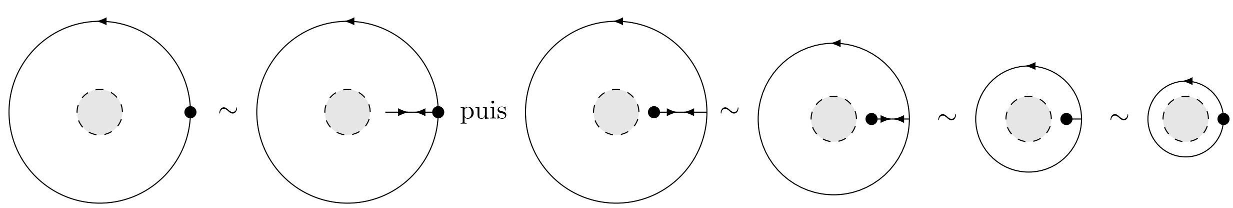
Preuve. Soient $F_0 : [0,1]^2 \to A$ une homotopie de γ_0 vers γ_0' et $F_1 : [0,1]^2 \to A$ une homotopie de γ_1 vers γ_1'. Alors, on vérifie immédiatement que l'application

$$\begin{array}{rccl} F : & [0,1]^2 & \longrightarrow & A \\ & (s,t) & \longmapsto & \begin{cases} F_0(s,2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_1(s,2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

est une A-homotopie de $\gamma_0\gamma_1$ vers $\gamma_0'\gamma_1'$, sa continuité en un point de la forme $\left(s, \frac{1}{2}\right)$ venant du fait que $\left|F\left(s,\frac{1}{2}\right) - F(s,t)\right|$, qui égale $\left|F_0\left(s,\frac{1}{2}\right) - F_0(s,t)\right|$ si $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ou $\left|F_1\left(s,\frac{1}{2}\right) - F_1(s,t)\right|$ si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, tend toujours vers 0 lorsque t tend vers $\frac{1}{2}$ — exprimer cela “avec des epsilons” pour une traduction parfaitement rigoureuse du “tend toujours vers 0” ci-dessus. ■

Exemple (concaténer un aller-retour ne change pas la classe d'homotopie)
Soient A une partie de $\mathbb{C}$, ℓ un lacet de A d'origine u et γ un chemin de A d'origine u. On note γ^{-1} le chemin inverse de γ. Alors, les lacets ℓ et $\ell\gamma\gamma^{-1}$ sont A-homotopes.

En effet, $\gamma\gamma^{-1}$ est homotope au lacet constant u. Concaténer un lacet constant ne change pas la classe d'homotopie. Sans paroles :



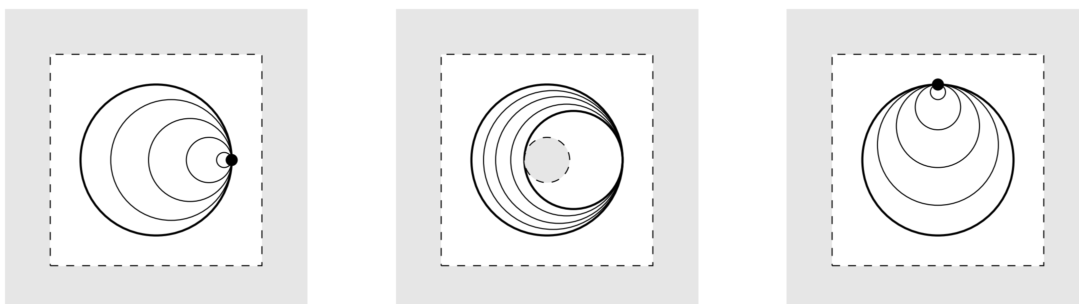
Définition (lacet homotope à zéro)
Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et γ un lacet de A, d'origine u. On dit que γ est *A-homotope à zéro* lorsqu'il est A-homotope au lacet constant $c_u : [0,1] \to A$, $t \mapsto u$.

Exercice 22
Soient A une partie de $\mathbb{C}$ et γ un lacet standard de A, d'origine u. Si $\tau \in [0,1]$ et si $v = \gamma(\tau)$, on note γ_τ le "même lacet γ dont on a décalé l'origine en v", c'est-à-dire le lacet

$$\begin{array}{rccl} \gamma_\tau : & [0,1] & \longrightarrow & A \\ & t & \longmapsto & \gamma\left(\{t+\tau\}\right) \end{array}$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du réel x (et $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière). Montrer que pour tout $\tau \in [0,1]$, γ est homotope à zéro si, et seulement si γ_τ l'est.

Autrement dit, $\boxed{\textit{dire qu'un lacet est homotope à zéro ne dépend pas de l'origine dudit lacet}}$



Sans paroles

1.2.3 Intégrale le long d'un chemin

Définition (intégrale d'une fonction le long d'un chemin)
Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}$ et $f : \mathrm{Supp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ une application continue. L'*intégrale (curviligne) de f le long de γ* est le nombre $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ défini par

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \times \gamma'(t)dt. \tag{5}$$

On note aussi parfois $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f$. Lorsque le chemin est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme dans la définition générale qu'on a prise, on fait la somme des intégrales sur les intervalles sur lesquels γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Avec les notations de la définition d'un chemin, si on note γ_k la restriction de γ à l'intervalle $[c_k, c_{k+1}]$, cela s'écrit

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f\left(\gamma(t)\right) \times \gamma'(t)dt.$$

Cela dit, si on se place dans l'obédience de l'intégrale de Lebesgue[♫], les points en lesquels γ n'est pas dérivable forment un ensemble de mesure nulle, rendant la formule (5) toujours valide.

Exemple fondamental
Pour tout $r > 0$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on note $C(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct selon la notation (3). Alors,

[♫] Henri-Léon Lebesgue, 1875–1941

$$\boxed{\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z}=2i\pi}$$

et

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\,,\ \int_{C(0,r)}z^ndz=0}$$

Pour montrer cela, il suffit de faire le calcul : d'une part $\int_{C(0,r)}\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\left(re^{it}\right)^{-1}\times rie^{it}dt=2i\pi$ et d'autre part, si $n\neq -1$, $\int_{C(0,r)}z^ndz=\int_0^{2\pi}\left(re^{it}\right)^n ire^{it}dt=ir^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt=ir^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi}=0.$

De façon (à peine) plus générale,

$$\int_{C(a,r)}\frac{dz}{z-a}=2i\pi\ \text{ et }\ \int_{C(a,r)}(z-a)^ndz=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\,.$$

Exemple (aller-retour sur un segment)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:U\to\mathbb{C}$ une application continue. Si $[u,v]\subseteq U$, alors, avec les notations (4)

$$\int_{S(u,v)}f(z)dz+\int_{S(v,u)}f(z)dz=0$$

En effet, faisant le changement de variable $s=1-t$, on obtient $\int_0^1 f((1-t)u+tv)dt=\int_0^1 f((1-s)v+su)ds$ et on reconnaît de part et d'autre de l'égalité les intégrales curvilignes de l'énoncé, aux facteurs $u-v$ près.

Proposition (intégrale curviligne et concaténation)
Si une fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est continue et si γ_0 et γ_1 sont deux chemins que l'on peut concaténer, alors

$$\int_{\gamma_0\gamma_1}f(z)dz=\int_{\gamma_0}f(z)dz+\int_{\gamma_1}f(z)dz$$

Preuve. C'est immédiat à partir de la définition de la concaténation de deux chemins. ■

Proposition (invariance par équivalence de chemins)
Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction continue. Soient a,b,c,d des nombres réels, $\gamma:[c,d]\to\mathbb{C}$ un chemin et $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et surjective. Alors, les intégrales de f le long des chemins γ et $\gamma\circ\varphi$ sont égales :

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)dz$$

Preuve. C'est le changement de variable sous l'intégrale ordinaire, ou encore le théorème de dérivation des fonctions composées : lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_c^d f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt=\int_a^b f\left(\gamma\circ\varphi(s)\right)\gamma'\left(\varphi(s)\right)\varphi'(s)ds=\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)dz,$$

la dernière égalité étant garantie par le fait que la croissance de φ impose que $a\leq b$. Lorsque γ est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ce calcul vaut pour tous les intervalles sur lesquels γ est $\mathcal{C}^1$ et il n'y a qu'à sommer. ■

A noter
La preuve montre immédiatement, par l'intégration de la formule de la dérivée d'une fonction composée et application du théorème fondamental de l'analyse, que cette invariance s'étend au cas de n'importe quel changement de paramètre du chemin, fût-il non injectif. L'énoncé est le suivant : *soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction continue.*

Soient a, b, α, β des nombres réels, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors, les intégrales de f le long des chemins γ et $\gamma \circ \varphi$ sont égales.

Exemple
On note C le carré de sommets 1, i, -1 et $-i$ parcouru une fois dans le sens direct à partir de 1. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_C z^n dz = \int_{C(0,r)} z^n dz.$$

En effet, on calcule brutalement : en décomposant le lacet en quatre chemins de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on paramètre directement avec l'intervalle $[0,1]$ en utilisant le théorème d'invariance par changement de paramétrage des chemins, il vient

$$\int_C z^n dz = \int_{S(1,i)} z^n dz + \int_{S(i,-1)} z^n dz + \int_{S(-1,-i)} z^n dz + \int_{S(-i,1)} z^n dz.$$

Or, lorsque $n \neq -1$ et $u, v \in \mathbb{C}$, un calcul immédiat de primitive fournit

$$\int_{S(u,v)} z^n dz = \int_0^1 \left(u + t(v-u)\right)^n (v-u) dt = \left[\frac{\left(u + t(v-u)\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi, lorsque $n \neq -1$, les termes se simplifient deux à deux et

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1}\left(\left(i^{n+1} - 1\right) + \left((-1)^{n+1} - i^{n+1}\right) + \left((-i)^{n+1} - (1)^{n+1}\right) + \left(1 - (-i)^{n+1}\right)\right) = 0.$$

Pour $n = -1$, le calcul devient

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z} &= (-1+i)\int_0^1 \frac{dt}{1-t+it} - (1+i)\int_0^1 \frac{dt}{-t+i(1-t)} + (1-i)\int_0^1 \frac{dt}{-1+t-it} + (1+i)\int_0^1 \frac{dt}{t-i(1-t)} \\
&= -2(1-i)\int_0^1 \frac{dt}{1-t+it} + 2(1+i)\int_0^1 \frac{dt}{t-i(1-t)} \\
&= -2(1-i)\int_0^1 \frac{1-t-it}{(1-t)^2+t^2} dt + 2(1+i)\int_0^1 \frac{t+i(1-t)}{t^2+(1-t)^2} dt.
\end{aligned}$$

Or, une primitive de $t \mapsto \frac{t}{2t^2-2t+1}$ est $\frac{1}{4}\ln\left(2t^2-2t+1\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(2t-1\right)$ et une primitive de $t \mapsto \frac{1-t}{2t^2-2t+1}$ est $-\frac{1}{4}\ln\left(2t^2-2t+1\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(2t-1\right)$ — selon la technique ordinaire, pour calculer ces primitives, écrire le dénominateur sous forme canonique $2t^2-2t+1 = 2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, changer de variable $s = t - \frac{1}{2}$, faire apparaître et reconnaître les primitives de $\frac{s}{2s^2+\frac{1}{2}}$ et de $\frac{1}{2s^2+\frac{1}{2}}$, ces dernières faisant intervenir le logarithme d'un côté, l'arctangente de l'autre. Il en résulte que

$$\int_0^1 \frac{t}{2t^2-2t+1} dt = \int_0^1 \frac{1-t}{2t^2-2t+1} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\int_C \frac{dz}{z} = -2(1-i)\frac{\pi}{4}(1-i) + 2(1+i)\frac{\pi}{4}(1+i) = 2i\pi.$$

Ouf ! Ce résultat est un cas particulier de résultats beaucoup plus généraux qui seront abordés plus bas. Une fois les théorèmes sur les fonctions holomorphes installés, ce fastidieux calcul sera bien inutile et son résultat, rendu immédiat, ne nécessitera *aucun* développement technique.

Exercice 23
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $n \neq -1$. On note $\mathcal{P}$ le polygone régulier à m côtés dont les sommets sont les racines m^{e} de l'unité, parcouru une fois dans le sens direct en partant de 1. Alors, $\oint_{\mathcal{P}} z^n dz = 0$.

Proposition (majoration standard d'une intégrale curviligne)
Soient $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et γ un chemin de $\mathbb{C}$. Alors,
(i) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{\mathrm{Supp}(\gamma)}|f|\times \mathrm{Long}(\gamma).$

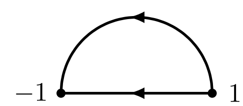
(ii) Si $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \max_{\mathrm{Supp}(\gamma)}|f|\times \mathrm{Long}(\gamma)$*, alors $|f|$ est constant sur le support de γ.*

Preuve. (i) Si γ est défini sur l'intervalle $[a,b]$, alors

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b \max_{\mathrm{Supp}(\gamma)}|f|\times|\gamma'(t)|\,dt = \max_{\mathrm{Supp}(\gamma)}|f|\times\mathrm{Long}(\gamma).$$

Noter que $\mathrm{Supp}(\gamma)=\gamma([a,b])$ est compact puisque γ est continu et l'intervalle $[a,b]$ compact ; c'est cela qui permet la notation max.
(ii) Si une fonction $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue et positive ou nulle, alors $\int_a^b\varphi(t)dt=0$ si, et seulement si $\varphi\equiv 0$. [En effet, si $\Phi[a,b]\to\mathbb{R}$ est la fonction $\Phi(t)=\int_a^t\varphi(\tau)d\tau$, alors le théorème fondamental de l'analyse assure que Φ est une primitive de φ ; en particulier, Φ est croissante et vérifie $\Phi(a)=0$. Ainsi, $\Phi(b)=0$ si, et seulement si $\Phi\equiv 0$, qui équivaut encore au fait que φ soit nulle.]
On applique ce résultat d'analyse élémentaire à la fonction $t\mapsto\left(\max_{\mathrm{Supp}(\gamma)}|f|-|f\left(\gamma(t)\right)|\right)\times|\gamma'(t)|$. ■

Exemple (en général, l'intégrale curviligne dépend du chemin)
On considère deux chemins reliant 1 et -1 : d'une part le segment S, d'autre part l'hémicercle nord C de centre 0. Plus précisément, on prend les paramétrages sur $[0,1]$ suivants :



$$\forall t\in[0,1],\ S(t)=1-2t \quad\text{et}\quad C(t)=e^{i\pi t}.$$

On intègre la fonction $z\mapsto\Re(z)$ sur ces deux chemins. On trouve d'un côté $\int_S\Re(z)dz=\int_0^1(1-2t)(-2)dt=0$ et de l'autre $\int_C\Re(z)dz=\int_0^1\cos(\pi t)\times\left(i\pi e^{i\pi t}\right)dt=\frac{i\pi}{2}$.

A noter
L'implication du (ii) dans la proposition précédente n'est pas une équivalence, comme le montre par exemple l'intégration de la fonction $z\mapsto z$ sur le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct.

Définition (primitive complexe)
Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:D\to\mathbb{C}$. On dit qu'une application $F:D\to\mathbb{C}$ est une *primitive (complexe)* de f lorsque F est dérivable au sens complexe et $F'(z)=f(z)$, pour tout $z\in D$.

Proposition (intégrale curviligne d'une fonction admettant une primitive)
Soient D un ouvert du plan complexe et $f:D\to\mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F sur D.
(i) Si $u,v\in\mathbb{C}$ et si γ un chemin de D d'origine u et d'extrémité v, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que de u et v, mais pas du choix du chemin γ reliant u à v. Plus précisément,

$$\int_\gamma f(z)dz=F(v)-F(u).$$

(ii) En particulier, si γ est un lacet, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz=0.$

Preuve. C'est le théorème fondamental de l'analyse. Il suffit de montrer (i) puisque (ii) en est un corollaire immédiat. Soit $[a,b]$ l'intervalle sur lequel γ est défini. On suppose d'abord que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b F'\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt=F\circ\gamma(b)-F\circ\gamma(a)=F(v)-F(u)$. Lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on applique ce résultat sur chaque sous-intervalle où γ est de classe $\mathcal{C}^1$; les valeurs de F en les bouts de ces sous-intervalles se simplifient. ■

A noter
(i) Reprendre, à la lumière de ce résultat, les calculs d'intégrales de z^n le long du cercle ou du carré, en notant que si $n\neq-1$, l'application $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive complexe de z^n sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
En particulier, le fait que l'intégrale de $\frac{1}{z}$ le long du cercle unité ne soit pas nulle démontre que

$$\boxed{z \mapsto \frac{1}{z} \text{ n'admet pas de primitive sur } \mathbb{C}^*}$$

Il sera plus bas longuement question des primitives de $\frac{1}{z}$ et des déterminations du logarithme complexe dans certains ouverts de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) L'exemple *En général, l'intégrale curviligne dépend du chemin* de la page 16 montre aussi que l'application $z \mapsto \Re(z)$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$. On aura plus bas des arguments qui assurent que cette fonction n'admet de primitive sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

1.2.4 Indice d'un point par rapport à un lacet

Théorème (indice d'un point)

Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$. On note U l'ouvert du plan $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\gamma)$. On note Ind *l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ind}_\gamma : U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-p} \end{array}$$

Alors,

(i) $\mathrm{Ind}_\gamma(p) \in \mathbb{Z}$*, pour tout* $p \in U$

(ii) Ind_γ *est constante sur tout composante connexe de* U

(iii) $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 0$ *pour tout* p *appartenant à l'unique composante connexe non bornée de* U*.*

Preuve. (i) Si $[a,b]$ est l'intervalle sur lequel γ est défini, $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-p}$. En particulier, cette écriture montre immédiatement que $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ est défini dès que $p \notin \mathrm{Supp}(\gamma)$. Pour montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ est entier, il suffit de montrer que $\exp\left(2i\pi \,\mathrm{Ind}_\gamma(p)\right) = 1$. On suppose d'abord que γ est de classe $\mathcal{C}^1$. On note $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ l'application

$$f(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-p}.$$

Puisque l'intégrand est continu, le théorème fondamental de l'analyse assure que f est dérivable et que, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}.$$

Cela montre que l'application $t \mapsto \frac{f(t)}{\gamma(t)-p}$, qui est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, a une dérivée nulle et est donc constante sur le connexe $[a,b]$. Comme la valeur de f en a est 1, on obtient que

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = \frac{\gamma(t)-p}{\gamma(a)-p}.$$

Enfin, puisque γ est un lacet, $\gamma(b) = \gamma(a)$ et donc $f(b) = 1$, ce qu'il fallait démontrer pour assurer que $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ est un nombre entier.

Si γ n'est plus de classe $\mathcal{C}^1$ que par morceaux, avec les notations de la définition d'un chemin, on étudie la même fonction f sur chaque sous-intervalle $[c_k, c_{k+1}]$ sur lequel γ est de classe $\mathcal{C}^1$. On montre ainsi que sur chaque $[c_k, c_{k+1}]$, la fonction f s'écrit $f(t) = \frac{\gamma(t)-p}{\gamma(c_k)-p}$, si bien que

$$f(b) = \exp \sum_{k=1}^n \int_{c_k}^{c_{k+1}} \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-p} = \prod_{k=1}^n f\left(c_{k+1}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\gamma\left(c_{k+1}\right)-p}{\gamma\left(c_k\right)-p} = \frac{\gamma(b)-p}{\gamma(a)-p} = 1$$

la dernière égalité venant toujours du fait que γ est un lacet.

(ii) L'application Ind_γ est continue sur U. On peut voir cela de deux façons : dans l'obédience de l'intégrale de Riemann, il suffit de remarquer que l'application $(p,t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}$ est continue sur $U \times [a,b]$. Si l'on raisonne dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on peut remarquer que si $p_0 \in U$ et si $\overline{D}\left(p_0, r\right) \subseteq U$ où $r > 0$, alors

$\left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}\right| \leq \frac{\max|\gamma'|}{r}$ pour tout $t \in [a,b]$, ce qui suffit à montrer que Ind_γ est continue en p puisque, pour tout t, l'application $p \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}$ l'est. Une fois la continuité de Ind_γ acquise, on conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires, les composantes connexes de $\mathbb{Z}$ étant les singletons $\{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

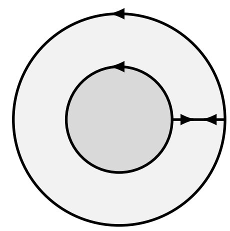
(iii) Soit $M = \max_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|$ — se rappeler que γ est continu. Alors, pour tout $R > M$, si $|p| \geq R$ et si $z \in \mathrm{Supp}\,(\gamma)$, la seconde inégalité triangulaire assure que $|z-p| \geq R-M$ et donc que $|\mathrm{Ind}_\gamma(p)| \leq \frac{\mathrm{Long}(\gamma)}{2\pi(R-M)}$. En faisant tendre R tend vers $+\infty$, cela montre que $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 0$ dès que p est dans la composante connexe non bornée de U. ■

Exercice 24
Montrer que la compacité du support d'un lacet entraîne l'existence et l'unicité de la composante connexe non bornée de son complémentaire.

Définition (indice d'un point par rapport à un lacet)
Dans les conditions du théorème, on dit que $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$ est *l'indice du point p par rapport au lacet γ.*

A noter
L'indice d'un point p par rapport à un lacet γ calcule, en le formalisant, *le nombre de tours que fait le lacet γ autour du point p.*

Par exemple, si γ est le lacet qui, partant de 1, parcourt le cercle de centre 0 et de rayon 1 une fois dans le sens direct, puis le segment $[1,2]$, puis le cercle de centre 0 et de rayon 2 une fois dans le sens direct, puis le segment $[2,1]$.



Alors,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \begin{cases} 2 & \text{si } \ p \in D\,(0,1) \\ 1 & \text{si } \ p \ \text{ est dans la couronne } \ D\,(0,2) \setminus \overline{D}\,(0,1) \ \text{ privée du segment } [1,2] \\ 0 & \text{si } \ p \notin \overline{D}\,(0,2)\,. \end{cases}$$

Exercice 25
Vérifier par le calcul la précédente disjonction des cas de valeurs de l'indice.

1.2.5 Vérifier la formule de Cauchy

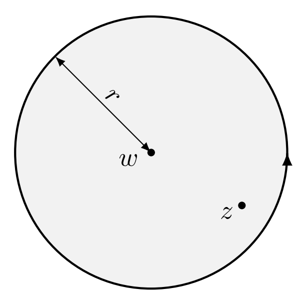
Définition (vérifier la formule (locale et circulaire) de Cauchy)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. On dit que f *vérifie la formule (locale et circulaire) de Cauchy sur U* lorsque pour tout $z \in U$, pour tout $w \in U$, pour tout $r > 0$,

$$\left.\begin{array}{c} \overline{D}\,(w,r) \subseteq U \\ \text{et} \\ z \in D\,(w,r) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(w,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{6}$$

Remarquer que lorsque f vérifie la formule de Cauchy, sa valeur en un point z est déterminée par ses valeurs sur n'importe quel cercle de centre w et de rayon r, pourvu que le disque fermé $\overline{D}\,(w,r)$ soit dans l'ouvert de définition de f et que z soit dans le disque ouvert $D\,(w,r)$. Le cas particulier où $w = z$ est souvent utilisé, qui donne lieu à la formule

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dès que $\overline{D}\,(z,r) \subseteq U$. Notamment, l'intégrale de cette dernière formule — dès qu'elle a un sens ce qui est le cas pour tout r “assez petit” —, ne dépend pas de r.



Exemples
(i) *Toute fonction constante vérifie la formule de Cauchy sur* $\mathbb{C}$.
En effet, soient $c \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $z \in D(w, r)$. Alors,

$$\int_{C(w,r)} \frac{c}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi c \operatorname{Ind}_{C(w,r)}(z) = 2i\pi c$$

puisque le cercle est parcouru une fois dans le sens direct par le chemin $C(w, r)$. Noter que dans le cas où $w = z$, ce résultat est une paraphrase du calcul de l'intégrale $\int_{C(z,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ fait plus haut.

(ii) Plus généralement, *si n est un entier naturel, la fonction $z \mapsto z^n$ vérifie la formule de Cauchy sur* $\mathbb{C}$.

Pour montrer cela, on procède par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant acquis par le calcul pour les fonctions constantes. Soient n un entier naturel non nul, $z, w \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On suppose que $z \in D(w, r)$. Alors,

$$\int_{C(w,r)} \frac{\zeta^n}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C(w,r)} \frac{\zeta^{n-1}(\zeta - z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C(w,r)} \frac{\zeta^{n-1} z}{\zeta - z} d\zeta.$$

Puisque $\zeta \mapsto \zeta^{n-1}$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$ et puisque $C(w, r)$ est un lacet, la première de ces deux intégrales est nulle. Par récurrence, la seconde égale $2i\pi z^n$, ce qu'il fallait démontrer.

(iii) *L'exponentielle vérifie la formule de Cauchy sur* $\mathbb{C}$.

En effet, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$, puisque la série de Taylor de la fonction exponentielle est une série entière de rayon infini, elle converge uniformément sur le disque (le cercle suffit, ici) de centre 0 et de rayon r, ce qui légitime l'interversion de l'intégrale et de la série dans le calcul suivant :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(w,r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(w,r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\zeta^n}{\zeta - z} \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(w,r)} \frac{\zeta^n}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Ce calcul typique sera repris plus bas dans un cadre beaucoup plus général.

A noter
Pour mesurer la puissance de ces raisonnements, tenter de montrer directement la formule $z^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(w,r)} \frac{\zeta^n}{\zeta - z} d\zeta$ en paramétrant le cercle et en cherchant des primitives des fonctions en jeu.

1.3 Fonctions développables en séries entières

1.3.1 Mémento sur les séries entières

Une *série entière* est une série de fonctions de la variable complexe z de la forme $\displaystyle\sum_n a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

A noter
Le vocable "soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière" est synonyme de "soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes". Cela dit, lorsqu'on choisit de dire ou d'écrire "soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière", c'est qu'on s'apprête à focaliser le discours sur la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$, la plupart du temps sur la convergence de cette série en des sens divers.

Proposition (lemme d'Abel[♫])
Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série numérique $\sum_n a_n z_0^n$ converge. Alors, la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ où $r < |z_0|$.

Preuve. Puisque la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge, la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : soit $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $0 \leq r < |z_0|$, pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$, $|a_n z^n| \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ et $\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. ■

[♫] Niels Henrik Abel, 1802–1829

A noter
Dans les conditions de la proposition précédente, la preuve montre qu'il suffit que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée pour que la conclusion subsiste. C'est souvent sous cette forme qu'on trouve ce lemme d'Abel dans la littérature.

Définition (rayon et disque de convergence d'une série entière)
Le *rayon* d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ est

$$\rho = \sup\left\{r \geq 0,\ a_n r^n \text{ est le terme général d'une série absolument convergente}\right\} \in [0, +\infty].$$

Le disque ouvert $D(0, \rho)$ est le *disque (ouvert) de convergence* de la série entière $\sum_n a_n z^n$.

A noter
Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $\rho \in [0, +\infty]$ son rayon. Les assertions qui suivent sont toutes (sauf (iii)) des conséquences directes du lemme d'Abel.

(i) Pour tout $z \in D(0, \rho)$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, à vitesse au moins géométrique.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, \rho)$, la série $\sum a_n z^n$ diverge, à vitesse au moins géométrique.

(iii) Sur le cercle $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = \rho\}$ que l'on appelle improprement *cercle de convergence*, tout peut se passer. L'ensemble des points du cercle en lesquels la série converge peut être fini (même vide), dense, égal à tout le cercle, etc .

(iv) Le rayon est aussi

$$\rho = \sup\left\{r \geq 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0\right\} = \sup\left\{r \geq 0,\ \left(a_n r^n\right)_n \text{ est une suite bornée}\right\}.$$

(v) Puisque les convergences ou les divergences des séries entières hors du cercle de convergence sont à vitesse au moins géométriques, les critères de d'Alembert♫ ou de Cauchy♫ pour la convergence des séries numériques s'appliquent. Il fournissent les formules

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

avec la convention habituelle $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

(vi) Le théorème de continuité d'une série uniformément convergente de fonctions continues assure que, sur son disque de convergence, une série entière définit une fonction continue.

Exemples

(i) Les fonctions polynomiales sont des séries entières de rayon infini (!).

(ii) Les deux plus célèbres des séries entières sont l'exponentielle — de rayon infini — et la série géométrique de raison 1 — de rayon 1 —, savoir :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

La série $\sum_n z^n$ ne converge en aucun point de son cercle de convergence, puisque la suite $\left(e^{in\theta}\right)_n$ ne converge vers 0 pour aucune valeur de $\theta \in \mathbb{R}$.

(iii) D'une manière générale, *si F est une fraction rationnelle et si $|a_n| \sim F(n)$ lorsque n tend vers l'infini, le rayon de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est* 1.

C'est une conséquence directe des formules (7).

(iv) Par exemple, la série entière $\sum_n \frac{z^n}{n}$ est de rayon 1 puisque son coefficient général est une fraction rationnelle en n. Sur son cercle de convergence, elle diverge en 1 mais converge en tous les autres points.

♫Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783

♫La formule du rayon avec la puissance $1/n$ est souvent attribuée à Jacques Hadamard qui écrit une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences à ce sujet en 1888 — qui, par ailleurs, est la date de naissance de l'axiomatique des espaces vectoriels, due à Guiseppe Peano —, mais Cauchy l'avait écrite en 1821 dans son cours à l'école polytechnique.

Pour prouver cela, on peut faire appel à une très classique transformation d'Abel, version discrète de l'intégration par parties. Voici l'argumentaire : soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Alors, $S_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $z^n = S_n - S_{n-1}$; en outre, on a la majoration uniforme $|S_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$, pour tout $n \geq 1$. On calcule ainsi la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \frac{1}{N} S_N - 1 + \sum_{n=1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Or, $\left|S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leq \frac{2}{|1-z|}\frac{1}{n(n+1)}$, pour tout n, et la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge. Ainsi, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_n S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est absolument convergente, donc convergente. Par ailleurs, $\left|\frac{1}{N} S_N\right| \leq \frac{2}{|1-z|}\frac{1}{N}$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Ainsi, on a montré que la série numérique $\sum_n \frac{z^n}{n}$ converge pour tout z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

(v) Les séries entières $\sum_n n! z^n$ et $\sum_n n^n z^n$ sont de rayon nul. C'est une application directe des formules (7).

(vi) Les séries entières $\sum_n z^{n^2}$ et $\sum_n z^{n!}$ sont de rayon 1.
En effet, ces deux séries convergent dès que $|z| < 1$ — leur terme général est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente. Elles divergent lorsque $|z| \geq 1$ — leur terme général ne tend alors pas vers 0.

Proposition (sommes et produits de séries entières)
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs ρ_a et ρ_b. Pour tout $n \geq 0$, on note

$$s_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad p_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors, les séries entières $\sum_n s_n z^n$ et $\sum_n p_n z^n$ ont un rayon supérieur ou égal à $\min\{\rho_a, \rho_b\}$, et lorsque ces séries convergent,

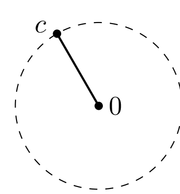
$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right).$$

Preuve. Exercice. ∎

Proposition (théorème d'Abel radial)
Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon strictement positif, et $c \in \mathbb{C}$ un point du cercle de convergence tel que la série $\sum_n a_n c^n$ converge. Alors, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, c]$. En particulier,

$$\lim_{\substack{z \to c \\ z \in [0,c]}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n.$$

Preuve. La convergence uniforme suffit à l'interversion de la somme et de la limite. On montre cette convergence uniforme, en utilisant une transformation d'Abel.
On note ρ le rayon de la série entière et $c = \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Les points du segment $[0, c]$ sont les $re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq \rho$. Puisque la série $\sum_n a_n c^n$ converge, on note R_n son n^{e} reste : pour tout $n \geq 0$,



$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k$$

si bien que pour tout n, on peut écrire $a_n c^n = R_n - R_{n+1}$.
Pour montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ sur le segment $[0, c]$, on montre que la suite de ses sommes partielles y est uniformément de Cauchy. Cela revient à montrer que les *paquets de Cauchy* $\sum_{n=N+1}^{M} a_n z^n$ tendent vers 0 lorsque N tend vers l'infini, uniformément sur $[0, c]$ et en $M \geq N + 1$.

Pour cela, dans les paquets de Cauchy, on remplace $a_n c^n$ par la différence des restes comme ci-dessus, puis on opère à une transformation d'Abel, sorte d'intégration par parties discrète. On obtient successivement : si $r \in [0, \rho]$ et si N et M sont des entiers naturels tels que $N + 1 \leq M$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{M} a_n \left(re^{i\theta}\right)^n &= \sum_{n=N}^{M} a_n c^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \sum_{n=N}^{M} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n (R_n - R_{n+1}) \\ &= \left(\frac{r}{\rho}\right)^N R_N - \left(\frac{r}{\rho}\right)^M R_{M+1} + \sum_{n=N+1}^{M} R_n \left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

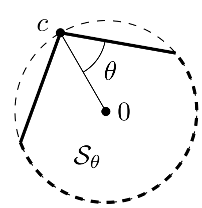
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la série $\sum_n a_n c^n$ converge, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq n_0$. Alors, dès que $N \geq n_0$, pour tout $r \in [0, \rho]$, puisque les $\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ sont des réels positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 1, on a la majoration

$$\left|\sum_{n=N+1}^{M} R_n \left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1}\right)\right| \leq \varepsilon \left(\frac{r}{\rho}\right)^{N+1} \left(1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{M-N}\right) \leq \varepsilon.$$

En outre, les deux "termes de bord" sont faciles à majorer : $\left|\left(\frac{r}{\rho}\right)^N R_N\right| \leq \varepsilon$ et $\left|\left(\frac{r}{\rho}\right)^M R_{M+1}\right| \leq \varepsilon$, pour tout $r \in [0, \rho]$, pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, on a montré que la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur le segment $[0, c]$, ce qui entraîne sa convergence uniforme sur ledit segment. $\blacksquare$

A noter
Cette preuve gagne en intelligibilité si on l'écrit dans le cas particulier où $c = \rho = 1$, qui se généralise ensuite sans difficulté.

Exercice 26 (Abel secteur)
Sous les hypothèses du théorème d'Abel radial, montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ est uniforme sur tout compact de tout secteur de la forme



$$\mathcal{S}_\theta = \{c\} \cup \left\{z \in D(0, |c|),\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{c} - 1\right) \in [-\theta, \theta]\right\},$$

où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Noter que l'on peut encore écrire $\mathcal{S}_\theta = \left\{c + \rho e^{i(\operatorname{Arg}(c)+\eta)},\ |\eta| \leq \theta,\ 0 \leq \rho < 2|c|\cos\eta\right\}$.

Exemple très classique
Le théorème des séries alternées assure que la série $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. En outre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in [0, 1[$. Le théorème d'Abel radial assure alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Exercice 27 (en guise d'application d'Abel radial)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On suppose que les séries $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ et $\sum_n c_n$ convergent. Montrer que dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Proposition (dérivation et primitivation des séries entières)
Soit $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$ et soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la fonction qu'elle définit sur $D(0, \rho)$. Alors,

(i) la fonction f est dérivable au sens complexe sur $D(0,\rho)$ et se dérive terme à terme au sens où, pour tout $z \in D(0,\rho)$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \ ;$$

(ii) la fonction f admet des primitives sur $D(0,\rho)$, qui s'obtiennent par primitivation terme à terme au sens où ces primitives sont les fonctions de la forme

$$z \mapsto C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n, \quad \textit{où} \quad C \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Il s'agit d'abord de noter que les séries entières $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum_n \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont également ρ pour rayon. Pour montrer (i), on applique le théorème de dérivation des séries qui assure le résultat puisque la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge simplement et que sa série des dérivées $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D(0,\rho)$, en vertu du lemme d'Abel.
(ii) est une conséquence de (i) en prenant en compte le fait que le disque $D(0,\rho)$ est connexe. ■

Tout petit formulaire
Les formules donnée ci-dessous sont à la fois des énoncés sur la restriction des fonctions à l'axe réel et une définition des fonctions de la variable complexe portant le même nom. Certaines sont des redites.

(i) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\boxed{(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n}$ où le coefficient du binôme généralisé aux nombres complexes est

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(a-k).$$

Lorsque $a \in \mathbb{N}$, le rayon de cette série entière est infini — c'est une fonction polynomiale ; dans tous les autres cas, le rayon est 1.
[Noter que la formule $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour tout z (non nul) de module strictement inférieur à 1 est le cas où $a = -1$.]

(ii) $\boxed{\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$ et $\boxed{\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ respectivement parties paire et impaire de l'exponentielle.

$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$ et $\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ respectivement parties paire et impaire de e^{iz}.

Comme l'exponentielle, ces quatre séries ont un rayon infini.

(iii) $\boxed{\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}}$ de rayon 1.

(iv) $\boxed{\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}}$ de rayon 1.

On reviendra longuement sur les affaires de logarithme. Pour l'heure, le lien entre cette nouvelle serie entière "logarithme" et la fonction exponentielle complexe se limite à leur restriction à l'intervalle $]-1,1[$.

Petite mise en garde
Attention à ne pas se laisser piéger par le *nom* donné à ces séries entières. Si on se laisse emporter par trop d'enthousiasme, on risque d'écrire des formules fausses ; on y reviendra. Comme toujours, il convient de

privilégier le sens et de se méfier de l'apparente évidence provoquée par les notations — qui sont pourtant bien commodes !

Exercice 28

(i) Montrer que, dans le disque de convergence, $\frac{d}{dz}(1+z)^a = a(1+z)^{a-1}$.

(ii) Montrer que, sur $\mathbb{C}$, $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$, $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$, $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$, $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$.

(iii) Montrer que, dans le disque de convergence, $\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2}$.

(iv) Montrer que, dans le disque de convergence, $\frac{d}{dz}\log\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z}$.

1.3.2 Fonctions DSE

Définition (fonction DSE ou analytique)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. Pour tout $u \in U$, on dit que f *est développable en série entière (DSE) en* u ou encore *analytique en* u lorsqu'il existe $r > 0$ tel que

(i) $D(u,r) \subseteq U$;

(ii) il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ ait un rayon supérieur ou égal à r ;

(iii) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-u)^n$, pour tout $z \in D(u,r)$.

Lorsque f est DSE en tout point de U, on dit que f est *DSE sur* U, ou encore *analytique sur* U.

Exemple
Si $P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ est une application polynomiale à coefficients complexes, elle est analytique sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout $u \in \mathbb{C}$, la formule de Taylor-polynômes en u s'écrit

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{n=0}^{d} \frac{P^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n$$

où la série entière $\sum_n \frac{P^{(n)}(u)}{n!} z^n$ est de rayon infini puisque c'est un polynôme.

Proposition (somme et produit de fonctions analytiques)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u \in U$. Si f et g sont DSE en u (respectivement sur U), alors $f+g$ et fg sont DSE en u (resp. sur U).

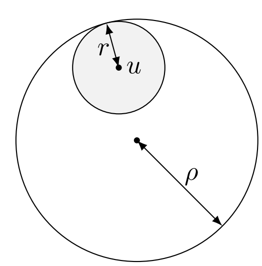
Preuve. Il suffit d'ajouter ou de multiplier les DSE(u), les rayons restent strictement positifs comme le garantit la proposition sur la somme et le produit de séries entières. ■

Contrairement à ce que pourrait laisser penser une lecture superficielle, la proposition qui suit n'a rien d'évident. Elle mérite d'être relue une fois établi que le développement en série entière d'une fonction en un point, lorsqu'il existe, est nécessairement son développement de Taylor♫ en ledit point.

Proposition (une série entière est analytique sur son disque ouvert)
Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction définie par une série entière de rayon $\rho > 0$. Alors, f est DSE en tout point du disque de convergence $D(0,\rho)$.

Preuve. Soit $u \in D(0,\rho)$.
Il s'agit de trouver une série entière $\sum_n b_n z^n$ de rayon non nul telle que, au voisinage de u, la fonction f ait un DSE de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-u)^n.$$



Soit $r = \rho - |u|$. Alors, $r > 0$ et on montre que f est DSE en u avec un rayon au moins égal à r.

♫Brook Taylor, 1685–1731

① On fait un premier calcul de sommations sans prendre de précaution pour intervertir ou regrouper les termes. On justifie ces interversions ensuite. Si $h \in D(0,r)$, alors $u+h \in D(0,\rho)$ et

$$f(u+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u+h)^n = \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\0\leq k\leq n}} a_n \binom{n}{k} h^k u^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \left(\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} a_n u^{n-k}\right)$$

On pose — il faudra prouver que cette somme a bien un sens —

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} a_n u^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} a_{n+k} u^n.$$

Il suffit alors de montrer que la série entière $\sum_n b_n z^n$ a un rayon supérieur ou égal à r.

② On justifie les interversions, la convergence des séries qui définissent les b_n et on minore par r le rayon de la série entière $\sum_n b_n z^n$.

Soit $h \in D(0,r)$. Puisque $|u|+|h| \in D(0,\rho)$, en vertu du lemme d'Abel, la série $\sum_n a_n (|u|+|h|)^n$ est absolument convergente. Comme tous les termes des séries ci-dessous sont positifs ou nuls, toutes les interversions et tous les regroupements sont licites. Cela est par exemple justifié par le théorème de Fubini♫-Tonelli♫ : la famille

$$\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\0\leq k\leq n}} |a_n| \binom{n}{k} |h|^k |u|^{n-k}$$

est sommable puisque sa somme

$$\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\0\leq k\leq n}} |a_n| \binom{n}{k} |h|^k |u|^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|u|+|h|\right)^n$$

est une série convergente. Cela justifie, *via* le théorème de Fubini-Lebesgue, les interversions de la première partie de la preuve. Notamment : pour tout n, la série qui définit b_n converge absolument donc converge, et la série entière $\sum_n b_n z^n$, qui est absolument convergente en le point $z=h$, a un rayon supérieur ou égal à $|h|$. Comme cela est valide pour tout $h \in D(0,r)$, cela montre que ledit rayon est supérieur ou égal à r. ■

A noter

(i) La preuve en dit un peu plus que l'énoncé puisqu'elle montre que le DSE de f en un point u de $D(0,\rho)$ est valide au moins dans tous les disques ouverts de centre u que $D(0,\rho)$ contient — ou au moins dans le plus grand d'entre eux qui est $D(u,\rho-|u|)$, on dit comme on veut.

(ii) En particulier, toute série entière de rayon infini définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.

(iii) Cette proposition sera une conséquence immédiate du théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes.

Théorème (unicité du DSE)
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon $\rho > 0$. On suppose qu'il existe $r \in]0,\rho[$ tel que

$$\forall z \in D(0,r),\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Alors, $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $r \in]0,\rho[$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$. On note $R = \frac{r}{2}$. Alors, $\oint_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En paramétrant le cercle, cela s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(Re^{it}\right)}{e^{int}} dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(Re^{it}\right)^k\right) e^{-int} dt.$$

♫Guido Fubini, 1879–1943
♫Leonida Tonelli, 1885–1946

Or, le lemme d'Abel assure que la convergence de la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0,r)$, et donc sur le cercle de centre 0 et de rayon R. Ainsi le signe $\int$ et le signe $\sum$ peuvent-ils être intervertis. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \right) = 2\pi a_n R^n,$$

et donc que $a_n = 0$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

A noter

(i) Cette preuve est une preuve "à la Cauchy". Ici encore, lorsqu'on aura fait le lien entre le DSE d'une fonction analytique en un point et sa série de Taylor en le même point, ce théorème prendra un éclairage nouveau.

(ii) On énonce un corollaire immédiat qui justifie le mot "unicité" dans le théorème précédent : *si $u \in \mathbb{C}$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux séries entières de rayons strictement positifs et si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-u)^n$$

pour tout z dans un disque ouvert non vide centré en u, alors $a_n = b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, une fonction analytique ne peut pas avoir deux DSE différents en un point donné.

(iii) On peut encore affaiblir les hypothèses du théorème d'unicité en supposant seulement que la fonction définie par la série entière est nulle sur un *cercle* de centre 0 et de rayon strictement positif.

Proposition (principe des zéros isolés pour les séries entières)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle de nombre complexes. On suppose que la série entière $\sum_n a_n z^n$ a un rayon strictement positif et que la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, définie sur le disque ouvert de convergence, vérifie $f(0) = 0$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$, pour tout $z \in D(0,r) \setminus \{0\}$.

Preuve. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle, soit $N = \min\{n \geq 0,\ a_n \neq 0\}$. La condition $f(0) = a_0 = 0$ impose que $N \geq 1$. En mettant z^N en facteur, on écrit $f(z) = z^N g(z)$ où g est la fonction définie par la série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n} z^n$ dont le rayon de convergence est le même que celui de f. Or, $g(0) = a_N \neq 0$ et g est continue en 0, puisqu'elle est définie par une série entière. Ainsi, g est non nulle sur un disque ouvert $D(0,r)$ où $r > 0$, ce qui prouve le résultat. ∎

1.4 Le théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes

On démontre ici le théorème d'équivalence qui fonde la définition des fonctions holomorphes. La preuve, longue et consistante, met en jeu un raisonnement historiquement important, qui met déjà en relation les différents points de vue qui font la richesse de l'analyse complexe.

Théorème (d'équivalence pour les fonctions holomorphes)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f vérifie la formule de Cauchy sur U ;

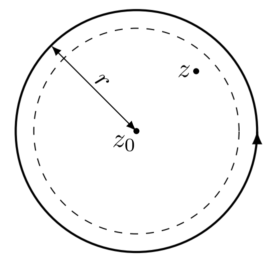
(ii) f est développable en séries entières sur U ;

(iii) f est dérivable au sens complexe sur U.

Preuve. (i)⇒(ii) On suppose que f vérifie la formule de Cauchy sur U. Soit $z_0 \in U$. On montre que f est DSE en z_0. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0,r) \subseteq U$. Alors, pour tout $z \in D(z_0,r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta.$$

Dans cette dernière intégrale, la variable courante ζ est sur le cercle de centre z_0 et de rayon r alors que z est dans le disque ouvert. Ainsi, $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$: le développement en série entière



$$\frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

est valide et sa convergence est normale et donc uniforme dans le disque fermé $\overline{D}\left(z_0, \frac{r+|z|}{2}\right)$, comme le garantit le lemme d'Abel. On peut donc intervertir la somme et l'intégrale ; on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n ,$$

le rayon de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) z^n$ étant supérieur ou égal à r puisque le calcul ci-dessus est valide pour tout $z \in D(z_0, r)$. On a montré que f est DSE sur $D(z_0, r)$.

(ii)⇒(iii) C'est immédiat : si une fonction est DSE sur U, elle admet en chaque point un développement limité d'ordre 1, ce qui signifie qu'elle y est dérivable au sens complexe.

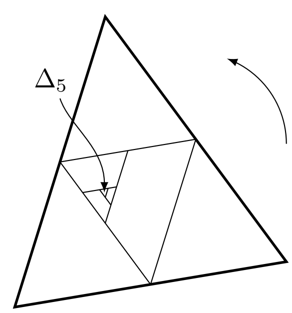
(iii)⇒(i) Cette implication est la clef de l'équivalence. On suppose que f est dérivable sur U.
① On démontre d'abord l'assertion suivante : *pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, pour tout $u \in U$, pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ continue sur U et dérivable sur $U \setminus \{u\}$, pour tout triangle Δ inclus dans U, l'intégrale de f le long du bord du triangle $\partial\Delta$ est nulle :*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0. \tag{8}$$

On précise les termes de cet énoncé : soient $a, b, c \in U$ tels que l'enveloppe convexe Δ de $\{a, b, c\}$ soit contenue dans U — l'enveloppe convexe est l'ensemble $\{\alpha a + \beta b + \gamma c,\ \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1],\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}$; c'est l'"intérieur" du triangle. On note alors $\partial\Delta$ le chemin formé de la concaténation des segments $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$ prise dans le sens direct. Noter que l'invariance de l'intégrale par changement de paramétrage et le fait que $\partial\Delta$ soit un lacet donne un sens non ambigu à la formule (8).

On prouve l'assertion ①. On note $I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$.

On suppose dans un premier temps que $u \notin \Delta$. On découpe Δ en les quatre triangles dont les sommets, outre les sommets de Δ, sont les milieux des arètes de Δ. Tous ces sous-triangles ont pour périmètre la moitié du périmètre de Δ. Alors, I est la somme des intégrales de f le long des bords des quatres triangles de la subdivision — dans la somme, les trois intégrales aller-retours le long des segments joignant les milieux des arêtes de Δ sont nulles. L'inégalité triangulaire permet d'en déduire que l'intégrale le long d'au moins un de ces quatres triangles, que l'on nommera Δ_1, vérifie



$$|I| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right|$$

— il suffit de prendre pour Δ_1 l'un des triangles pour lequel le module de l'intégrale de f est le plus grand.

En itérant ce procédé, on obtient une suite de triangles $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \ldots$ qui vérifient : $\mathrm{Long}(\partial\Delta_n) = 2^{-n}\,\mathrm{Long}(\partial\Delta)$ et $|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$. L'intersection de cette suite décroissante de parties fermées non vides de l'espace complet $\mathbb{C}$ est encore non vide. Soit ainsi $z_0 \in \cap_{n \geq 1} \Delta_n$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque f est dérivable en z_0, soit $r > 0$ tel que

$$\forall z \in D(z_0, r)\,,\ \ |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon\, |z - z_0|\,.$$

Soit aussi n tel que $\Delta_n \subseteq D(z_0, r)$.
[Noter qu'un tel n existe. En effet, si z_0 est dans un triangle uvw, $\max\{|z_0 - u|, |z_0 - v|, |z_0 - w|\} \leq \mathrm{diam}(uvw)$ où le diamètre $\mathrm{diam}(uvw)$ du triangle est la plus grande distance joignant deux points de ce triangle. On montre aisément que le diamètre d'un triangle est le plus grand de ses côté, ce qui entraîne que $\max\{|z_0 - u|, |z_0 - v|, |z_0 - w|\} \leq \max\{|u - v|, |v - w|, |w - u|\} < \pi(uvw)$ où $\pi(uvw)$ désigne le

périmètre du triangle uvw. Ainsi, par convexité du disque, dès que le périmètre de uvw est inférieur ou égal à un réel positif r, le triangle est tout entier dans le disque de centre z_0 et de rayon r.]

Alors, puisque la fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admet évidemment une primitive sur D, l'intégrale de cette fonction le long du lacet $\partial\Delta_n$ est nulle, si bien que

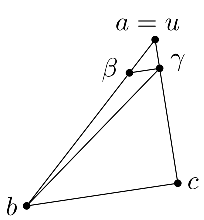
$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\, dz \right| \leq 4^n \varepsilon \operatorname{Long}(\partial\Delta_n) \max_{z \in \partial\Delta_n} |z - z_0|.$$

Là encore, la distance de z_0 à un point du bord de Δ_n est inférieure ou égale au diamètre de Δ_n qui est lui-même inférieur ou égal au périmètre de Δ_n. On obtient ainsi

$$|I| \leq \varepsilon 4^n \operatorname{Long}(\partial\Delta_n)^2 \leq \varepsilon \operatorname{Long}(\partial\Delta).$$

On a montré que $|I|$ est inférieur à tout réel strictement positif, c'est-à-dire que $I = 0$.

Il reste à traiter le cas où $u \in \Delta$. On note a, b, c les sommets de Δ, que l'on suppose distincts sans quoi l'assertion est évidente.

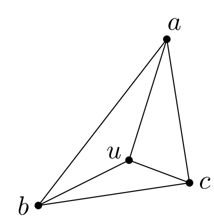


Si u est un sommet de Δ, disons $u = a$, soient $\beta \in]a, b]$ et $\gamma \in]a, c]$. Alors, I est la somme des intégrales de f le long des bords des triangles $a\beta\gamma$, $b\gamma\beta$ et $c\gamma b$, les deux dernières étant nulles grâce au raisonnement ci-dessus. On note Δ' le triangle $a\beta\gamma$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en a, soit $\eta > 0$ tel que $D(a, \eta) \subseteq U$ et tel que $|f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$ dès que $z \in D(a, \eta)$. Alors, si $\beta, \gamma \in D(a, \eta)$,

$$|I| = \left| \int_{\partial\Delta'} f(z)dz \right| \leq \varepsilon \operatorname{Long}(\partial\Delta') \leq \varepsilon \operatorname{Long}(\partial\Delta).$$

On a montré que $|I|$ est inférieure à tout réel strictement positif, c'est-à-dire que $I = 0$.

On suppose pour finir que u est à l'intérieur de Δ. On applique ce qui précède aux trois triangles abu, bcu et cau : chacune des intégrales de f le long de leurs bords est nulle. Comme I est la somme de ces intégrales, cela prouve que $I = 0$.



② On montre ensuite l'assertion : *pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, pour tout $u \in U$, pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ continue sur U et dérivable sur $U \setminus \{u\}$, pour tout $r > 0$ et pour tout $w \in U$ tels que $\overline{D}(w, r) \subseteq U$,*

$$\int_{C(w,r)} f(z)dz = 0.$$

Soient $r > 0$ et $w \in U$ tels que $\overline{D}(w, r) \subseteq U$. Pour obtenir la formule, il suffit de montrer que f admet une primitive sur $D(w, r)$. Pour tout $z \in D(w, r)$, le segment $[w, z]$ est encore dans $D(w, r)$; on pose alors

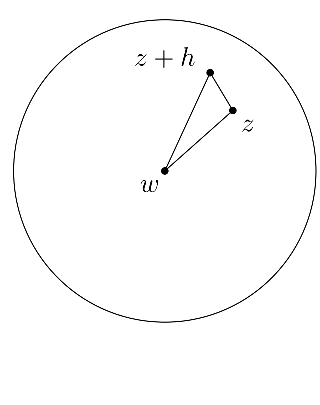
$$F(z) = \int_{S(w,z)} f(\zeta)d\zeta.$$

On prouve que F est une primitive de f. Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $z + h \in D(w, r)$. Alors, puisque le triangle $w, z, z + h$ est dans $D(w, r)$, le ① garantit que l'intégrale de f le long de ce triangle est nulle. Autrement dit,

$$F(z + h) - F(z) = \int_{S(z,z+h)} f(\zeta)d\zeta,$$

ou encore

$$F(z + h) - F(z) - hf(z) = \int_{S(z,z+h)} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta.$$



Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en z, soit $\eta > 0$ tel que $D(z, \eta) \subseteq D(w, r)$ et tel que $|f(\zeta) - f(z)| \leq \varepsilon$ dès que $|\zeta - z| \leq \eta$. Alors, il suffit que $|h| \leq \eta$ pour que $|F(z+h) - F(z) - hf(z)| \leq \varepsilon h$, ce qui montre que F est dérivable au sens complexe en z et que $F'(z) = f(z)$.

3 Fin de la preuve de (iii)⇒(i) : soient $r > 0$ et $w \in U$ tels que $\overline{D}(w, r) \subseteq U$. Soit aussi $z \in D(w, r)$. On définit l'application $g : U \to \mathbb{C}$ par

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z \\ \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z. \end{cases}$$

Puisque f est dérivable, g est continue sur U et également dérivable sur $U \setminus \{z\}$. On peut alors appliquer 2 à g, ce qui s'écrit

$$\int_{C(w,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C(w,r)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \times 2i\pi \operatorname{Ind}_{C(w,r)}(z) = 2i\pi f(z)$$

puisque z est dans le disque ouvert $D(w, r)$ et puisque le chemin $C(w, r)$ parcourt le cercle une fois dans le sens direct. ■

Définition (fonction holomorphe)
Dans les conditions du théorème d'équivalence, un application qui vérifie les conditions (i), (ii) ou (iii) est dite *holomorphe* sur U.

Notation
Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, on notera $\boxed{\mathcal{O}(U)}$ l'ensemble des applications holomorphes $U \longrightarrow \mathbb{C}$.

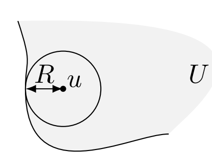
A noter
(i) L'holomorphie est à vrai dire une propriété *locale* des fonctions complexes de la variable complexe. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $u \in U$, on dit que f est *holomorphe en u* lorsque f est dérivable au sens complexe sur un voisinage de u. Une fonction est alors holomorphe sur U lorsqu'elle est holomorphe en tout point de U.

En revanche, la dérivabilité au sens complexe est, elle, une propriété *ponctuelle* en le sens suivant : une fonction complexe de la variable complexe peut être dérivable en un point sans n'être dérivable sur aucun autre point d'un voisinage. Prendre par exemple la fonction $z \mapsto |z|^2$, qui est dérivable au sens complexe en 0, et seulement en 0 (exercice).

(ii) **Opérations sur les fonctions holomorphes**
La somme et le produit de deux fonctions holomorphes sur U y sont encore holomorphes. Si on ajoute encore le produit par une constante (qui est le produit par une fonction constante), ces lois confèrent à $\mathcal{O}(U)$ une structure de $\mathbb{C}$-algèbre. En outre, une fonction holomorphe sur un ouvert U est inversible dans l'anneau $\mathcal{O}(U)$ si, et seulement si elle ne s'annule pas sur U, avec la formule de dérivation ordinaire $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
La composée de deux fonctions holomorphes est encore holomorphe, avec la formule de dérivation $f \circ g = (f' \circ g) \times g'$. La réciproque d'une fonction holomorphe bijective est encore holomorphe avec la formule de dérivation ordinaire $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
Toutes ces propriétés se voient immédiatement en utilisant le point de vue "dérivable au sens complexe" de l'holomorphie.

On conclut ce chapitre par un corollaire de la preuve de l'implication (i)⇒(ii) du théorème d'équivalence. Ce résultat opératoire est souvent bien commode. Il a pour conséquence, notamment, que les rayons de tous les développements en séries entières d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sont infinis.

Proposition (rayons des DSE d'une fonction holomorphe))
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $u \in U$. Soit $R = \sup\{r > 0,\ D(u, r) \subseteq U\}$. Alors, le rayon du développement en série entière de f en u est supérieur ou égal à R.



Autrement dit, le rayon du développement en série entière de f en u est au moins égal à la distance de u au bord de U. Relier cela au *A noter* de la proposition 1.3.2.

2 Différentiabilité, Cauchy-Riemann, prolongement analytique

2.1 Dérivées complexes d'ordres supérieurs

Définition (dérivées d'ordre supérieur au sens complexe, classe $\mathcal{C}^\infty$)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U lorsqu'elle y est dérivable au sens complexe et lorsque sa dérivée (première) f' est continue — on dit aussi que f est *continûment différentiable sur* U. Par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, on dit que f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* U lorsque f y est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et lorsque sa dérivée $(n-1)^{\mathrm{e}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$; la dérivée de la dérivée $(n-1)^{\mathrm{e}}$ est alors appelée dérivée n^{e} et on la note comme toujours $f^{(n)}$. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \geq 1$, on dit que f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition (le DSE en un point d'une fonction holomorphe est celui de Taylor)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et, pour tout $u \in U$, le DSE de f au voisinage de u est

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n.$$

Preuve. Soit $u \in U$. Puisque f est holomorphe, elle est DSE au voisinage de u. Soient $r > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une (*la*, à vrai dire, puisqu'on a déjà vu qu'elle est unique) suite de nombre complexes telles que pour tout $z \in D(u,r)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Alors, le théorème de dérivation des séries entières assure que f est dérivable sur $D(u,r)$, que sa dérivée f' est également DSE en u — avec un rayon de convergence au moins égal à celui du DSE de f — et que le DSE de f' s'obtient en dérivant terme à terme le DSE de f. Cela valant pour tout $u \in U$, on en déduit que $f' \in \mathcal{O}(U)$. Par récurrence, il est alors immédiat que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U, et que pour tout $n \geq 1$, le DSE de $f^{(n)}$ en u s'obtient en dérivant terme à terme et s'écrit

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} k! a_{n+k}(z-u)^k.$$

En particulier, en prenant la valeur en u, on obtient que $f^{(n)}(u) = n!\binom{n}{0}a_n = n!a_n$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

A noter
(i) On peut encore écrire le DSE en u de f sous la forme

$$f(u+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!} z^n.$$

(ii) La proposition montre que la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ *au sens complexe* n'a qu'un très faible intérêt puisque lorsqu'un fonction est dérivable (une fois) au sens complexe, elle est automatiquement de classe $\mathcal{C}^\infty$. La seule motivation consiste à donner du sens à la dérivée n^{e} qui apparaît dans le développement de Taylor. On aurait pu s'en passer en définissant $f^{(n)}(u)$ par récurrence en utilisant l'implication $g \in \mathcal{O}(U) \implies g' \in \mathcal{O}(U)$.

Proposition (formule intégrale pour les dérivées d'ordres supérieurs)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, pour tout $z \in U$, pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z,r) \subseteq U$ et pour tout $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{9}$$

Preuve. La preuve du (i)⇒(ii) du théorème d'équivalence pour les fonctions holomorphes montre que, dans les conditions de l'énoncé, le coefficient de $(u-z)^n$ dans le développement de $f(u)$ au voisinage de z est $\frac{1}{2i\pi}\oint_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$. Combinée avec le théorème d'unicité du DSE, la proposition précédente montre la formule cherchée. ∎

A noter
On avait déjà vu que la valeur d'une fonction holomorphe sur un disque ouvert est déterminée par ses valeurs sur le cercle, frontière dudit disque. Toutes les dérivées dans le disque sont donc également déterminées par les valeurs de la fonction sur le cercle. La proposition donne des formules intégrales de ces dérivées, qui s'avèrent souvent bien commode pour obtenir des majorations. C'est là une des manifestations de la puissance opératoire de la formule de Cauchy.

Corollaire (inégalités de Cauchy)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z,r) \subseteq U$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n^{e} coefficient du DSE de f en z vérifie

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{\max_{\partial D(z,r)} |f|}{r^n}.$$

Preuve. On part de la formule intégrale (9) qui fournit, par majoration standard, l'inégalité

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{n+1}} \max_{\partial D(z,r)} |f| \times 2\pi r = \frac{\max_{\partial D(z,r)} |f|}{r^n}.$$

■

A noter
Avec les notations de la proposition, les inégalités de Cauchy permettent de comparer les coefficients du DSE en un point d'une fonction holomorphe aux suites géométriques de raisons $\frac{1}{r}$, pour tout $r \in]0,R[$.

2.2 Prolongement analytique

Définition (partie discrète)
Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *discrète* lorsque tous ses points sont isolés. Autrement dit, lorsque pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que

$$A \cap D(a,r) = \{a\}.$$

Exercice 29 Une partie de $\mathbb{C}$ à la fois discrète et compacte est finie.
[Un conseil : utiliser la propriété de compacité sous la forme *de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini.*]

Théorème (les zéros d'une fonction DSE sont isolés)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application DSE non nulle sur U. Alors, l'ensemble des zéros de f est une partie discrète de U.

Preuve. En notant $f_{|A}$ la restriction de f à une partie A de U, soient $\mathcal{N} = \left\{z \in U,\ \exists r > 0,\ f_{|D(z,r)} = 0\right\}$, et $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ la fonction indicatrice de $\mathcal{N}$ sur U — elle vaut 1 sur $\mathcal{N}$ et 0 en tout autre point de U. Par définition de $\mathcal{N}$, si $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ vaut 1 en un point $z \in U$, elle vaut 1 sur un disque ouvert centré en z. Inversement, si $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ vaut 0 en un point $z \in U$, la fonction f n'est identiquement nulle sur aucun voisinage de z ; le principe des zéros isolés pour les séries entières garantit donc qu'il existe $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(z,r) \setminus \{z\}$. En particulier, $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ vaut encore 0 sur $D(z,r)$. On a montré que $\mathbf{1}_{\mathcal{N}} : U \to \{0,1\}$ est localement constante sur le connexe U. Elle est donc constante. Comme f n'est pas la fonction nulle, $\mathbf{1}_{\mathcal{N}} \equiv 0$ et donc $\mathcal{N} = \emptyset$. On a montré que l'ensemble des zéros de f est discret puisque, si z est un zéro de f, comme il n'est pas dans $\mathcal{N}$, le principe des zéros isolés garantit qu'il existe un voisinage de z sur lequel f ne s'annule qu'en z. ■

A noter
(i) Passer du principe des zéros isolés à la discrétion des zéros d'une fonction holomorphe sur un connexe ne demande qu'à traiter l'affaire de la connexité. On a fait ici le choix d'éviter de parler de topologie induite. Pourtant, cette dernière preuve se trouve plus intelligible lorsqu'on raisonne avec cette notion.

(ii) La connexité est essentielle, bien sûr. La fonction valant 0 sur $D(1,1)$ et 1 sur $D(-1,1)$ est analytique ; pourtant, l'ensemble de ses zéros n'est pas discret puisque c'est $D(1,1)$.

Exemple
La formule $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ est valide pour tout $z \in \mathbb{R}$, c'est une formule trigonométrique ordinaire. On en déduit qu'elle est valide pour tout $z \in \mathbb{C}$ puisque $\mathbb{R}$ n'est pas une partie discrète de $\mathbb{C}$.
[Bon, d'accord, cette formule est facile à prouver directement, mais ce que dit le raisonnement, c'est qu'une fois qu'on la connaît sur $\mathbb{R}$, elle est vraie sur $\mathbb{C}$.]

Corollaire (cardinal des zéros d'une fonction DSE)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction DSE sur U, non nulle. Alors, le cardinal de l'ensemble des zéros de f est fini ou dénombrable.

Preuve. On note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f et $K = [0,1] + i[0,1]$. Alors, $\mathbb{C}$ est l'union dénombrable des compacts $z + K$ où $z \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ a une partie réelle et une partie imaginaire entières. Or, pour tout $z \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, l'intersection de $z + K$ et de $Z(f)$ est à la fois discrète — $Z(f)$ l'est — et compacte — K est compact et $Z(f)$ est fermé puisque f est continue ; ainsi, $(z + K) \cap Z(f)$ est fini. ■

Exercice 30
Montrer que toute partie discrète de $\mathbb{C}$ est finie ou dénombrable.
[Le corollaire est évidemment une conséquence immédiate de cela et du théorème qui précède.]

Corollaire (nullité d'une fonction holomorphe sur un connexe)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $u \in U$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est nulle sur un disque ouvert non vide contenant u

(ii) $f^{(n)}(u) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(iii) f est nulle sur U.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du fait que les zéros de f sont isolés. ■

Exercice 31
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est intègre si, et seulement si U est connexe.

Corollaire (principe du prolongement analytique)
Soient U un ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Si f et g coïncident sur une partie non discrète de U, alors elles coïncident sur U tout entier.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du fait que dans U, les zéros de $f - g$ sont isolés. ■

Exercice 32
Si A est une partie de $\mathbb{C}$ et si a est dans l'adhérence de A, on dit que a est un *point d'accumulation de A* lorsque $\forall r > 0$, $\exists z \in A \cap (D(a,r) \setminus \{a\})$. Montrer qu'une partie de $\mathbb{C}$ est discrète si, et seulement si elle ne *contient* pas de point d'accumulation.

2.3 Le théorème de Liouville

Définition (fonction entière)
Une fonction est dite *entière* lorsqu'elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (tout entier).

Théorème (de Liouville[♫])
Toute fonction entière et bornée est constante.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, les inégalités de Cauchy en 0 montrent que pour tout $r > 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}.$$

En faisant tendre r vers l'infini, cela entraîne que les coefficients du DSE de f en 0 sont tous nuls, sauf le coefficient constant — sur lequel les inégalités de Cauchy ne disent rien. Donc f est constante sur un disque ouvert centré en 0. Par prolongement analytique, cela implique que f est constante. ■

A noter
Une série entière est analytique sur son disque de convergence. La preuve que l'on a faite page 24 de ce résultat montre en particulier que lorsqu'une fonction est entière, le rayon de son DSE en chaque point de $\mathbb{C}$ est infini — voir le (i) du *A noter* qui suit cette preuve. Cela permet de conclure la preuve du théorème de Liouville présentée ci-dessus sans avoir recours au théorème du prolongement analytique : le DSE(0) de f est valide sur $\mathbb{C}$ tout entier puisque son rayon est infini.

[♫] Joseph Liouville, 1809–1882

2.4 Différentiabilité en 2 variables, équations de Cauchy-Riemann

Dans tout ce paragraphe, on note z la variable complexe générique et x et y ses parties réelle et imaginaire si bien que $z = x + iy$. On identifie comme d'habitude $\mathbb{C}$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ standard, ou encore à l'espace euclidien des vecteurs-colonne $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ au moyen des applications $\mathbb{R}$-linéaires bijectives isométriques

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 & \overset{\sim}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & (x,y) & \longmapsto & z = x + iy \end{array}$$

Ainsi, par exemple, on notera $(1, i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui oriente le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dans tout ce paragraphe. Au moyen de cette identification, tout ouvert de $\mathbb{C}$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on notera de la même façon sa version réelle dans $\mathbb{R}^2$ et sa version complexe dans $\mathbb{C}$, par l'abus de notation

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in U\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + iy \in U\right\} = \{z \in \mathbb{C},\ z \in U\}.$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : U \to \mathbb{C}$ est une application, on notera de façon générique $P(z) = P(x,y)$ et $Q(x,y) = Q(z)$ les parties réelle et imaginaire de $f(z) = f(x,y)$. Ainsi, P et Q sont des applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall z = x + iy \in U$,

$$f(z) = P(z) + iQ(z) \text{ ou encore } f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

et aussi toute combinaison équivalente qui mélange les notations dont on convient.
[En particulier, $P(x,y) = \Re\left(f(x+iy)\right)$ et $Q(x,y) = \Im\left(f(x+iy)\right)$.]

2.4.1 Les applications $\mathbb{C}$-linéaires, ou similitudes directes planes

Parmi les applications $\mathbb{R}$-linéaires $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se trouvent les très particulières applications $\mathbb{C}$-linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ces dernières sont évidemment les applications de la forme $z \mapsto az$ où $a \in \mathbb{C}$.

Proposition (matrice réelle d'une application $\mathbb{C}$-linéaire)
Soit $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors, la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $s_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s_a) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Preuve. Il suffit de faire le calcul : $s_a(z) = az = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$. ∎

A noter
(i) s_a est inversible (bijective) si, et seulement si $a \neq 0$, son inverse étant alors $s_{1/a}$.
(ii) Avec les notations de la proposition, en tant qu'application $\mathbb{R}$-linéaire, le polynôme caractéristique de s_a est

$$\det\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} - X s_a\right) = X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2 = (X - a)(X - \overline{a}).$$

En particulier, si $a \notin \mathbb{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, mais pas sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle a des valeurs propres non réelles.
(iii) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ standard, la base canonique $(1, i)$ est orthonormée — on a choisi de la prendre pour orienter cet espace. Par ailleurs, toute matrice orthogonale de dimension 2 est de la forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ avec $s, c \in \mathbb{R}$ et $c^2 + s^2 = 1$, selon qu'elle a pour déterminant 1 (matrice de rotation) ou -1 (matrice de réflexion). Le calcul montre aisément que deux matrices $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ commutent, ce qui entraîne que la matrice de s_a est celle de l'énoncé de la proposition non seulement dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, mais aussi dans n'importe quelle base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non tous les deux nuls. Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\theta$ et $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\theta$ — un tel θ existe et est unique modulo 2π[♫]. Alors, la matrice ci-dessus est le produit d'une homothétie et de la rotation d'angle θ, comme le montre la calcul immédiat

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Définition (préserver les angles orientés (de vecteurs de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^2$))
On dit qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *préserve les angles orientés* (de vecteurs de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^2$) lorsque s est l'application nulle ou lorsque s est bijective et vérifie

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ \widehat{(s(u), s(v))} = \widehat{(u, v)}.$$

A noter
(i) L'angle de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectifs u et v est bien défini dans le cas où ni u ni v ne sont nuls. Dans ce cas, la *mesure principale* de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est

$$\widehat{(u, v)} = \operatorname{Arg}\left(\frac{v}{u}\right).$$

où $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$ désigne l'argument principal du complexe z.
(ii) Dans le jargon, une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préserve les angles orientés est un *similitude plane directe.*

Exercice 33
Si $u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et si $\theta \in \mathbb{R}$, la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\widehat{(u, v)}$ est θ si, et seulement si $\theta \in]-\pi, \pi]$ et

$$\frac{v}{|v|} = e^{i\theta} \frac{u}{|u|}.$$

Exemples
(i) Si $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on note $h_\rho = \rho\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ l'*homothétie de rapport* ρ. Il est immédiat que *les homothéties préservent les angles orientés*, puisque une homothétie h_ρ est bijective et vérifie $\operatorname{Arg} \frac{h_\rho(v)}{h_\rho(v)} = \operatorname{Arg} \frac{\rho v}{\rho u} = \operatorname{Arg} \frac{v}{u}$.
(ii) Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, l'expression complexe de la *rotation d'angle* $\theta \in \mathbb{R}$ est $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$. Il est à nouveau immédiat que *les rotations préservent les angles orientés*, puisque toute rotation r_θ est bijective et vérifie $\operatorname{Arg} \frac{r_\theta(v)}{r_\theta(u)} = \operatorname{Arg} \frac{e^{i\theta} v}{e^{i\theta} u} = \operatorname{Arg} \frac{v}{u}$.
(iii) Un calcul analogue montre que *toute application $\mathbb{C}$-linéaire préserve les angles orientés* — noter qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire non nulle est bijective. Noter en passant que si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s'écrit sous forme géométrique $a = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $s_a = h_r \circ r_\theta = r_\theta \circ h_r$.

Proposition (les applications $\mathbb{C}$-linéaires préservent les angles et *vice-versa*)
Soit s une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Alors, s préserve les angles orientés si, et seulement si elle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Preuve. Le sens réciproque est montré dans les exemples qui précèdent. On suppose que $s \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ est bijective et préserve les angles orientés. On note $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note aussi $a = s(1) = \alpha + i\beta$ et $b = s(i) = \gamma + i\delta$. Puisque s est injective, ni a ni b ne sont nuls. Alors, $s(1+i) = a+b$ et la préservation des angles $\widehat{(1, i)}$ et $\widehat{(1, 1+i)}$ par s s'écrit

$$\frac{b}{|b|} = i\frac{a}{|a|} \text{ et } \frac{a+b}{|a+b|} = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{a}{|a|}.$$

[♫] Une question de fondements : d'où cela vient-il exactement ?

On note $r = \frac{|b|}{|a|} > 0$. Alors, la première égalité s'écrit $b = iar$ et en élevant au carré la seconde, on obtient $(1 + ir)^2 = i\left(1 + r^2\right)$, ce qui impose que $r = 1$ et donc que $b = ia$, ou encore que $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$. Avec les notations de la proposition *matrice réelle d'une application* $\mathbb{C}$*-linéaire* ci-dessus, on a montré que $s = s_a$. ■

2.4.2 Les équations de Cauchy-Riemann

On reprend les notations génériques $f = P + iQ = \begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}$ lorsque f est une fonction complexe de la variable complexe. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, f est continûment dérivable et pour tout $z \in U$,

$$f(z + h) = f(z) + f'(z)h + o(h) \tag{10}$$

lorsque le nombre complexe h tend vers 0. On note respectivement $\alpha = \alpha(z)$ et $\beta = \beta(z)$ les parties réelle et imaginaire de $f'(z)$, si bien que

$$f'(z) = \alpha + i\beta$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si l'on considère f selon le point de vue d'une fonction de deux variables réelles, en notant $z = x + iy = (x, y)$ et $h = k + i\ell = (k, \ell)$ avec $x, y, k, \ell \in \mathbb{R}$, selon l'étude du paragraphe 2.4.1, cela s'écrit :

$$f(x + k, y + \ell) = f(x, y) + \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix} + o\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix} \tag{11}$$

lorsque le vecteur $\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tend vers $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Autrement dit, f est différentiable sur U et, pour tout $(x, y) \in U$, sa matrice jacobienne en (x, y) s'écrit

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)\\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

On rassemble cette inégalité sous la forme des célèbres équations dites de Cauchy-Riemann.

Théorème (équations de Cauchy-Riemann)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = P + iQ \in \mathcal{O}(U)$ selon les notations génériques. Alors, en tout point de U,

(i) $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *et* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

(ii) $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $if'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}$

(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Preuve. Tout le travail est fait dans l'introduction de cette section. ■

Corollaire (une fonction holomorphe non constante n'est pas réelle)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si f est à valeurs réelles, alors f est constante.

Preuve. Avec les notations ci-dessus, si f est à valeurs réelles, alors Q est identiquement nulle. Les équations de Cauchy-Riemann assurent alors que les dérivées partielles de P sont identiquement nulles, et ainsi que $f'(z) = 0$, pour tout $z \in U$. Comme U est connexe, cela entraîne que f est constante. ■

A noter
(i) Les fonctions P et Q sont à valeurs réelles. A moins qu'elles ne soient constantes, cela implique qu'elle ne sont pas holomorphes. Attention à ne pas se laisser tenter par l'écriture formelle "$f'(z) = P'(z) + iQ'(z)$" qui n'aurait en général pas de sens.

(ii) Les assertions (i), (ii) et (iii) du théorème sont trois formulations équivalentes des liens entre les dérivées partielles de P et Q. Elles expriment le fait que la différentielle de f est $\mathbb{C}$-linéaire.

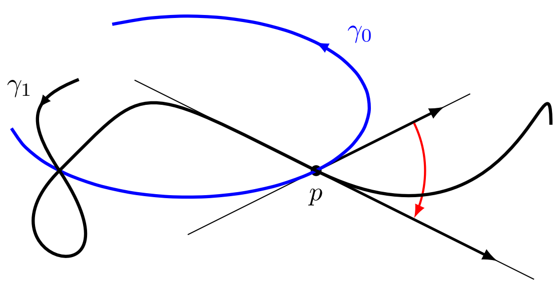
(iii) Les équations de Cauchy-Riemann constituent aussi une condition suffisante de dérivabilité au sens complexe. Cela est établi par l'équivalence immédiate entre les formules (10) et (11). On obtient ainsi l'énoncé suivant.

Proposition (holomorphe signifie différentiable plus Cauchy-Riemann)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. Alors, f est holomorphe si, et seulement si f est différentiable (sur U, au sens des fonctions de 2 variables réelles) et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur U.

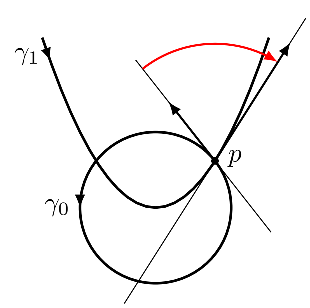
Exercice 34
Dans la même veine que le corollaire, montrer qu'une fonction holomorphe non constante ne prend pas ses valeurs dans une droite du plan.

2.4.3 Angles infinitésimaux

Définition (angle infinitésimal (orienté))
Soient $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}$, $t_0 \in]a,b[$ et $t_1 \in]c,d[$. On suppose que
(i) les supports de γ_0 et γ_1 se coupent en un point $p = \gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_1)$;
(ii) $\gamma_0'(t_0) \neq 0$ et $\gamma_1'(t_1) \neq 0$.
Alors, *l'angle infinitésimal (orienté) entre γ_0 et γ_1 en (t_0, t_1)* est l'angle orienté entre les vecteurs tangents $\gamma_0'(t_0)$ et $\gamma_1'(t_1)$ — en rouge sur le dessin.



Exemple
On considère les chemins $\gamma_0 : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$ et $\gamma_1 : t \in [-2, 2] \mapsto t + it^2$ dont les supports sont respectivement le cercle unité et une portion de la parabole d'équation $y = x^2$. Le point d'intersection de leurs supports dans le premier quadrant est le point dont les coordonnées (x, y) vérifient à la fois $x^2 + y^2 = 1$ et $y = x^2$: c'est $p = \left(\sqrt{\rho}, \rho\right)$ où $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$. Sur γ_1, c'est le point de paramètre $t_1 = \sqrt{\rho}$; sur γ_0, c'est le point de paramètre $t_0 = \arccos\sqrt{\rho} \approx 0.66624$. On calcule les vecteurs tangents : $\gamma_0'(t_0) = ie^{it_0} = -\rho + i\sqrt{\rho}$ et $\gamma_1'(t_1) = 1 + 2i\sqrt{\rho} \approx 1 + 1,57230i$. L'angle infinitésimal entre les chemins γ_0 et γ_1 en leur point d'intersection p en les paramètres respectifs $\arccos\sqrt{\rho}$ et $\sqrt{\rho}$ a pour mesure principale $\operatorname{Arg}\frac{1+2i\sqrt{\rho}}{-\rho+i\sqrt{\rho}} = \operatorname{Arg}\frac{1+2i\sqrt{\rho}}{-\sqrt{\rho}+i} = \operatorname{Arg}\left(1+2i\sqrt{\rho}\right)\left(-\sqrt{\rho}-i\right) = \operatorname{Arg}\left(\sqrt{\rho} - i(1+2\rho)\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} + 2\sqrt{\rho}\right) \approx -70°$



Définition (préserver les angles infinitésimaux orientés)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f *préserve les les angles infinitésimaux orientés* lorsque pour tout couple (γ_0, γ_1) de chemins de classe $\mathcal{C}^1$ de U, pour tout couple de paramètres (t_0, t_1) tels que $\gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_0)$ et $\gamma_0'(t_0)\,\gamma_1'(t_1) \neq 0$, l'angle infinitésimal (orienté) entre γ_0 et γ_1 en (t_0, t_1) égale l'angle infinitésimal (orienté) entre les chemins $f \circ \gamma_0$ et $f \circ \gamma_1$ en (t_0, t_1).

Autrement dit, lorsque

$$\left(\widehat{\gamma_0'(t_0)\,,\gamma_1'(t_1)}\right) = \left(\widehat{Df_z\left(\gamma_0'(t_0)\right),Df_z\left(\gamma_1'(t_1)\right)}\right),$$

où $z = \gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_1)$ et $Df_a(h)$ désigne l'image de h par la différentielle de f en a.

Proposition (les fonctions holomorphes préservent les angles infinitésimaux et *vice-versa*)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f préserve les angles infinitésimaux orientés si, et seulement si elle est holomorphe.

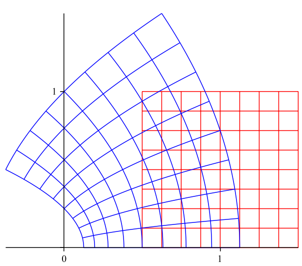
Preuve. Il suffit de faire le calcul : f préserve les angles infinitésimaux orientés si, et seulement si sa différentielle préserve les angles orienté de vecteurs, ce qui équivaut à sa $\mathbb{C}$-linéarité — autrement dit, à la dérivabilité de f au sens complexe. ∎

A noter
Si f est holomorphe, en reprenant les notations de la définition ci-dessus, si on note $z = \gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_1)$, la préservation de l'angle infinitésimal entre les chemins γ_0 et γ_1 en (t_0, t_1) s'écrit

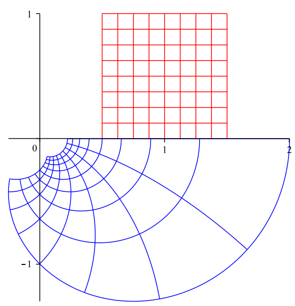
$$\left(\widehat{\gamma_0'(t_0)\,,\gamma_1'(t_1)}\right) = \left(\widehat{f'(z)\times\gamma_0'(t_0)\,,f'(z)\times\gamma_1'(t_1)}\right),$$

ce qui tombe sous le sens puisque la similitude directe $\zeta \mapsto f'(z)\zeta$ préserve les angles orientés.

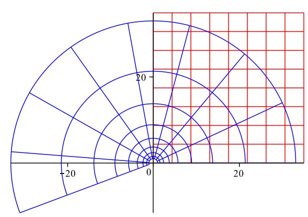
Exemples sans paroles
Les dessins ci-dessous représentent l'image — bleue — d'un carré grillagé — rouge — par les fonctions indiquées. On y voit la préservation de l'angle infinitésimal.



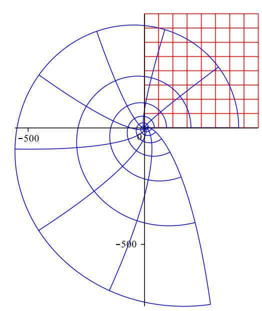
$z \mapsto \dfrac{z^2}{2}$



$z \mapsto \dfrac{1}{2z^2}$



$z \mapsto e^{z/10}$



$z \mapsto \left(\dfrac{z}{140}\right)^2 e^{z/140}$

Corollaire (une fonction holomophe de module constant est localement constante)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $|f|$ est constant sur U, alors f est constante sur U.

Preuve. Puisque f est à valeur dans un cercle, les angles infinitésimaux des images de deux chemins qui se coupent sont tous nuls. Donc f' est nulle sur le connexe U, ce qui entraîne que f soit constante. ∎

Exercice 35
Faire une preuve de ce corollaire en n'utilisant que les équations de Cauchy-Riemann.

Exercice 36
Plus généralement, montrer que si une fonction holomorphe sur un ouvert connexe est à valeur dans le support d'un chemin (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), alors f est constante.

2.5 Le principe du module maximum

Si A est une partie de $\mathbb{C}$, on note $\overline{A}$ son adhérence pour la topologie usuelle, et $\partial A = \overline{A} \setminus A$ sa frontière — qu'on appelle aussi son bord.

Théorème (principe du module maximum pour les fonctions holomorphes)
Soient U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ une application continue, holomorphe sur U. Alors,
(i) le maximum de $|f|$ est atteint en un point de ∂U ;

(ii) si l'ouvert U est connexe et si le maximum de $|f|$ est également atteint en un point de U, alors f est constante sur U.

Preuve. Noter que puisque f est continue sur le compact $\overline{U}$, sa borne supérieure sur $\overline{U}$ est un maximum. Ainsi, il suffit de prouver (ii). On suppose que le maximum de $|f|$ sur $\overline{U}$ est atteint en un point $z_0 \in U$. Soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subseteq U$. On note $M_r = \max\{|f(z_0 + u)|,\ |u| = r\}$ le maximum de f sur le cercle de centre z_0 et de rayon r — qui est compact. La formule intégrale de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

montre que $|f(z_0)| \leq M_r$ avec égalité seulement si $|f|$ est constante, égale à $|f(z_0)|$, sur le cercle de centre z_0 et de rayon r — s'il faut, voir ou revoir l'argumentation du cas d'égalité dans la majoration standard d'une intégrale curviligne, page 16. Or, puisque $|f(z_0)|$ est le maximum de $|f|$ sur $\overline{U}$ tout entier, on a aussi $M_r \leq |f(z_0)|$. On est dans le cas d'égalité : $|f(z_0)| = M_r$ et donc $|f|$ est constante, égale à $|f(z_0)|$, sur le cercle de centre z_0 et de rayon r. Puisque cela est vrai pour tout $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subseteq U$, cela entraîne que $|f|$ est constante au voisinage de z_0. Autrement dit, la fonction holomorphe f est à valeur dans un cercle sur un disque ouvert centré en z_0. Par conservation des angles infinitésimaux, on en déduit que f est constante sur ce disque ouvert. Ainsi, par prolongement analytique, puisque U est connexe, f est constante sur U. ■

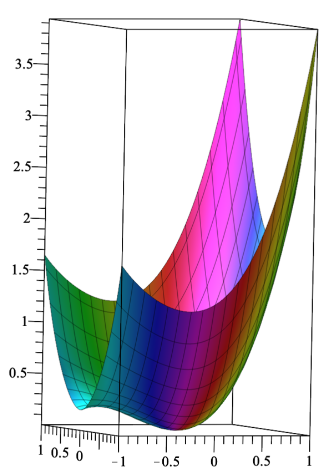
Corollaire (principe du module maximum, version extremum local)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $|f|$ a un maximum local, alors f est constante.

Preuve. Si $|f|$ a un maximum local en $z_0 \in U$, alors $|f|$ atteint ce maximum sur un ouvert connexe et borné de la forme $D(z_0, r)$, $r > 0$, à l'adhérence duquel f se prolonge en une application continue. Donc f est constante sur $D(z_0, r)$, donc sur U tout entier par prolongement analytique. ■

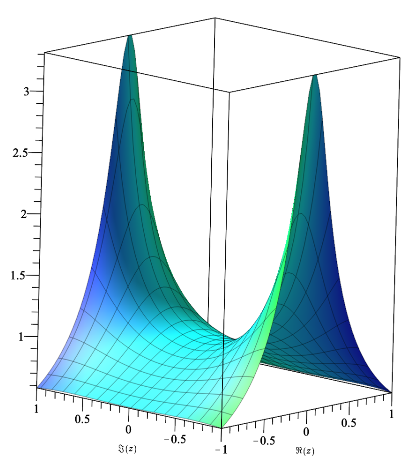
Exercice 37
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe. Montrer que si f ne s'annule pas et si $|f|$ a un minimum local, alors f est constante.

A noter
On appelle parfois "paysage" d'une fonction holomorphe f le graphe de l'application $z \mapsto |f(z)|$, ou encore de $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$. C'est une surface de $\mathbb{R}^3$. Ce que dit le principe du maximum, c'est que dans le paysage d'une fonction holomorphe, les sommets sont à l'horizon — au bord de l'ouvert.

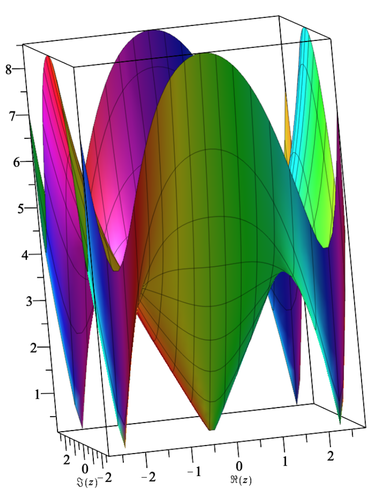
Cela est illustré sur les trois dessins qui suivent. Les fonctions dont on dessine le paysage sont mentionnées dans les légendes. Les ouverts au dessus desquels ces paysages sont pris sont tous des carrés centrés à l'origine.



$z \mapsto \left|\frac{4}{5}z^3 + z^2\right|$



$z \mapsto \left|\frac{1}{1+\frac{7}{10}z^2}\right|$



$z \mapsto |\sin z + \sinh z|$

Proposition (lemme de Schwarz[♫])
On note $D = D(0,1)$. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in D$. Alors,
(i) $|f(z)| \leq |z|$, pour tout $z \in D$;
(ii) s'il existe $z_0 \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors f est une rotation : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$, pour tout $z \in D$.

Preuve. (i) Puisque $f(0) = 0$, l'application $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ se prolonge en 0 en une fonction holomorphe sur D. Pour tout $r \in]0,1[$, le principe du module maximum appliqué à g sur $\overline{D}(0,r)$ assure que le maximum de $|g|$ sur le compact $\overline{D}(0,r)$ est atteint sur son bord ; ainsi, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$, pour tout $z \in D(0,r)$. On en déduit que $\forall z \in D$, $\forall r \in]|z|,1[$, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. En passant à la limite $r \to 1$, on obtient que $\forall z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$.
(ii) Si un tel z_0 existe, le module de la fonction $g \in \mathcal{O}(D)$ ci-dessus atteint son maximum en un point intérieur au connexe $\overline{D}$. Ainsi, g est constante, égale à $u \in \mathbb{C}$, comme le garantit le principe du module maximum. Sa valeur en z_0 assure que $|u| = 1$. ∎

2.6 Suites de fonctions holomorphes, intégrales à paramètres

Proposition (convergence uniforme de fonctions holomorphes)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U.
(i) Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f : U \to \mathbb{C}$, alors la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément sur tout compact de U, $f \in \mathcal{O}(U)$ et

$$f' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

(ii) Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout compact de U, alors la série des dérivées $\sum_n f'_n$ converge uniformément sur tout compact de U, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{O}(U)$ et

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n.$$

Preuve. C'est la formule de Cauchy. Il suffit de montrer (i) puisque (ii) en est une conséquence directe en raisonnant sur les sommes partielles. Puisque f est limite uniforme de fonctions continues, elle est continue sur U. Les intégrales curvilignes qui suivent ont donc un sens. Soit $u \in U$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(u,r) \subseteq U$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in D(u,r),\ f_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(u,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On passe à la limite $n \to \infty$, l'interversion de la limite et de l'intégrale étant garantie par la convergence uniforme de la suite de fonctions $\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$ sur le cercle de centre u et de rayon r. On obtient ainsi

$$\forall z \in D(u,r),\ f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(u,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

ce qui entraîne l'holomorphie de f sur $D(u,r)$. On a montré que f est holomorphe sur U. De la même façon, le passage à la limite dans l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in D(u,r),\ f'_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(u,r)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

montre que f' est la limite simple des f'_n. Enfin, si K est un compact de $D(u,r)$ et si δ est la distance de K au cercle de centre u et de rayon r, alors $\delta > 0$ et $|\zeta - z| \geq \delta$, pour tout $z \in K$ et pour tout ζ sur le cercle de centre u et de rayon r. Par conséquent, la majoration standard fournit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in K,\ |f'(z) - f'_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(u,r)} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| d\zeta \leq \frac{r}{\delta^2} \sup_{\overline{D}(u,r)} |f - f_n|$$

[♫] Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921

qui montre le convergence uniforme des dérivées sur K. Comme les disques ouverts $D(u,r) \subseteq U$, $u \in U$, $r > 0$ forment un recouvrement ouvert de U, cela suffit à prouver la convergence uniforme sur tout compact de la suite des dérivées. ■

A noter

(i) Par récurrence sur m, sous les hypothèses de la proposition, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a respectivement

$$f^{(m)} = \lim_n f_n^{(m)} \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)^{(m)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(m)}.$$

(ii) Les hypothèses relatives à la dérivation complexe sont plus faibles que celles relatives à la dérivation réelle ordinaire : on n'a pas besoin de faire d'hypothèse sur la convergence uniforme des dérivées pour conclure à la dérivabilité de la limite.

(iii) On peut aussi énoncer une variante plus opératoire de cette proposition. La preuve est laissée en exercice — on peut par exemple adapter la preuve ci-dessus, ou encore déduire ce résultat de la proposition précédente.

Proposition (convergence uniforme de fonctions holomorphes, version disques)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U.

(i) Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans U vers $f : U \to \mathbb{C}$, alors la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément sur tout disque fermé inclus dans U, $f \in \mathcal{O}(U)$ et

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

(ii) Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans U, alors la série des dérivées $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans U, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{O}(U)$ et

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'.$$

Exemple ultra classique

On note $\mathcal{P}$ le demi-plan ouvert $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 1\}$. Pour tout $z \in \mathcal{P}$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\Re(z)}}$$

si bien que la série numérique $\sum_n \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente, donc convergente. La *fonction ζ de Riemann* est alors définie par

$$\boxed{\forall z \in \mathcal{P},\ \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}}$$

Si K est un compact de $\mathcal{P}$, il existe $\alpha > 1$ tel que $K \subseteq \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) \geq \alpha\}$, si bien que

$$\forall z \in K,\ \forall n \geq 1,\quad \left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Comme $n^{-\alpha}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série $\sum_n \frac{1}{n^z}$ de fonctions de z converge normalement et donc uniformément sur tout compact de $\mathcal{P}$. On en déduit que

$$\boxed{\textit{la fonction } \zeta \textit{ est holomorphe sur } \mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 1\}}$$

En outre, pour tout entier naturel m et pour tout $z \in \mathcal{P}$, la dérivée m^{e} de ζ s'écrit

$$\zeta^{(m)}(z) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^z}.$$

Proposition (intégrales à paramètres holomorphes)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(X, \mathcal{F}, \mu)$ une espace mesuré. Soit $f : U \times X \to \mathbb{C}$. On suppose que :
(H1) pour presque tout $x \in X$, l'application $z \in U \mapsto f(z,x)$ est holomorphe ;
(H2) pour tout $z \in U$, l'application $x \in X \mapsto f(z,x)$ est mesurable ;
(H3) il existe $g \in \mathrm{L}^1(X, \mu)$ telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$ pour tout $z \in U$ et pour presque tout $x \in X$.
Alors,
(i) l'application $F : z \to \int_X f(z,x) d\mu(x)$ est holomorphe sur U ;
(ii) pour tout $z \in U$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée partielle $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)$ est intégrable ;
(iii) $\forall z \in U, \forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) d\mu(x)$.

Preuve. C'est encore la formule de Cauchy. L'hypothèse (H3) assure la définition de F. Soit $u \in U$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(u,r) \subseteq U$. Alors, pour presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in D(u,r)$,

$$f(z,x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(u,r)} \frac{f(\zeta,x)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On s'apprête à intégrer en x. Or, pour tout $\zeta \in \operatorname{Supp} C(u,r)$ et pour presque tout $x \in X$,

$$\left| \frac{f(\zeta,x)}{\zeta - z} \right| \leq \frac{g(x)}{|\zeta - z|}.$$

En paramétrant le chemin circulaire, le théorème de Fubini-Tonelli assure donc que

$$\int_X \int_0^{2\pi} \left| \frac{f\left(u + re^{it}, x\right) ire^{it}}{u + re^{it} - z} \right| d\mu(x) dt \leq \int_X \int_0^{2\pi} \frac{g(x) r}{|u + re^{it} - z|} d\mu(x) dt \leq \|g\|_1 \times \frac{2\pi r}{\operatorname{dist}\left(z, \partial D(u,r)\right)}$$

(notation évidente pour la distance). Alors, le théorème de Fubini tout court implique que

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \left(\int_{C(u,r)} \frac{f(\zeta,x)}{\zeta - z} d\zeta \right) d\mu(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(u,r)} \frac{\int_X f(\zeta,x) d\mu(x)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(u,r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

si bien que F est holomorphe sur $D(u,r)$. On a ainsi montré que F est holomorphe sur U. L'inégalité de Cauchy assure alors une inégalité de domination (locale) sur les dérivées partielles : pour presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in D(u,r)$,

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) \right| \leq \frac{n! g(x)}{r^n}.$$

Le raisonnement mené ci-dessus sur f appliqué aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(u,r)} \frac{\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(\zeta,x)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

montre à la fois (ii) — conséquence de Fubini-Tonelli — et (iii). ■

Exemple ultra classique
On note $\mathcal{Q}$ le demi-plan ouvert $\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$. Pour tout $z \in \mathcal{Q}$ et pour tout $t > 0$,

$$\left| t^{z-1} e^{-t} \right| = t^{\Re(z)-1} e^{-t}$$

ce qui montre que $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ — différentier l'étude en 0 et l'étude en $+\infty$. La *fonction Gamma d'Euler*[♫] est alors définie par

[♫] Leonhard Euler, 1707–1783

$$\boxed{\forall z\in\mathcal{Q},\ \Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt}$$

Pour tous α,β réels vérifiant $0<\alpha<\beta$, on note $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ la bande verticale fermée

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta}=\left\{z\in\mathbb{C},\ \alpha\leq\Re(z)\leq\beta\right\}.$$

Soit alors $z_0\in\mathcal{Q}$. On choisit α,β tels que $z_0\in\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ — il en existe, prendre par exemple $\alpha=\frac{1}{2}\Re\left(z_0\right)$ et $\beta=\frac{3}{2}\Re\left(z_0\right)$. Soit alors $t\geq 0$ et $z\in\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$. D'un côté, si $0\leq t\leq 1$, alors $\left|t^{z-1}e^{-t}\right|\leq t^{\alpha-1}e^{-t}$. De l'autre côté, si $t\geq 1$, alors $\left|t^{z-1}e^{-t}\right|\leq t^{\beta-1}e^{-t}$. Dans tous les cas, pour tout $z\in B_{\alpha,\beta}$ et pour tout $t\geq 0$,

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right|\leq e^{-t}\max\left\{t^{\alpha-1},t^{\beta-1}\right\}.$$

Comme $t\mapsto e^{-t}\max\left\{t^{\alpha-1},t^{\beta-1}\right\}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cette inégalité est une inégalité de domination de $(z,t)\mapsto t^{z-1}e^{-t}$ sur la bande $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$. Le théorème des intégrales à paramètres holomorphes montre ainsi que Γ est holomorphe sur cette bande, donc en z_0. On a montré que

$$\boxed{\textit{la fonction } \Gamma \textit{ est holomorphe sur } \mathcal{Q}=\left\{z\in\mathbb{C},\ \Re(z)>0\right\}}$$

En outre, pour tout $n\geq 0$ et pour tout $z\in\mathcal{Q}$, la dérivée n^{e} de Γ s'obtient en dérivant sous le signe somme : elle s'écrit

$$\Gamma^{(n)}(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}(\log t)^n e^{-t}dt.$$

3 Le théorème de Cauchy global

Proposition (existence locale de primitives pour une fonction holomorphe)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, pour tout $u \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $D(u,r) \subseteq U$, la fonction f admet une primitive sur $D(u,r)$.

Preuve. On a déjà vu cela dans la preuve du (iii)⇒(i) du théorème d'équivalence. En effet, en reprenant cette preuve, on a montré d'abord que si $f \in \mathcal{O}(U)$, son intégrale le long de tout triangle dont l'enveloppe convexe est incluse dans U est nulle — c'est l'assertion 1. Soient alors $u \in U$ et $r > 0$ tel que $D(u,r) \subseteq U$. Comme dans le 2 de la preuve du théorème d'équivalence, l'application $F : D(u,r) \to \mathbb{C}$ définie par la formule

$$F(z) = \int_{S(u,z)} f(\zeta)d\zeta$$

est bien définie puisque le segment $[u,z]$ est inclus dans $D(u,r)$ qui est lui-même inclus dans U. En outre, puisque son intégrale le long de tout triangle $\{u, z, z+h\}$ inclus dans $D(u,r)$ est nulle, la continuité f entraîne que $F(z+h) - F(z) = hf(z) + o(h)$, ce qui montre que F est dérivable en z et que $F'(z) = f(z)$, ce qu'il fallait démontrer. ■

A noter

(i) Retenir la forme d'une primitive locale d'une fonction holomorphe, donné par une simple intégrale curviligne le long d'un segment — comparer par ailleurs ce résultat au théorème fondamental de l'analyse.

(ii) En utilisant le même raisonnement, on montre que si V est un ouvert étoilé de centre u contenu dans U, la même intégrale curviligne est bien définie et définit une primitive de f sur V tout entier.

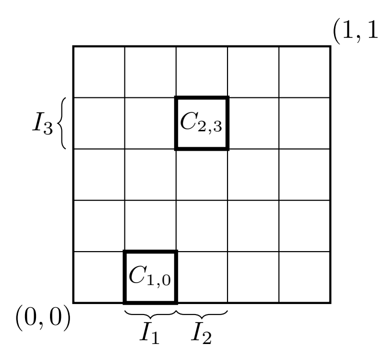
Théorème (invariance des intégrales de fonctions holomorphes par homotopie des chemins)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soient γ_0 et γ_1 deux chemins U-homotopes. Alors,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Preuve. Soit $H : [0,1]^2 \to U$ une U-homotopie entre les chemins γ_0 et γ_1, conformément aux notations de la section 1.2.2.

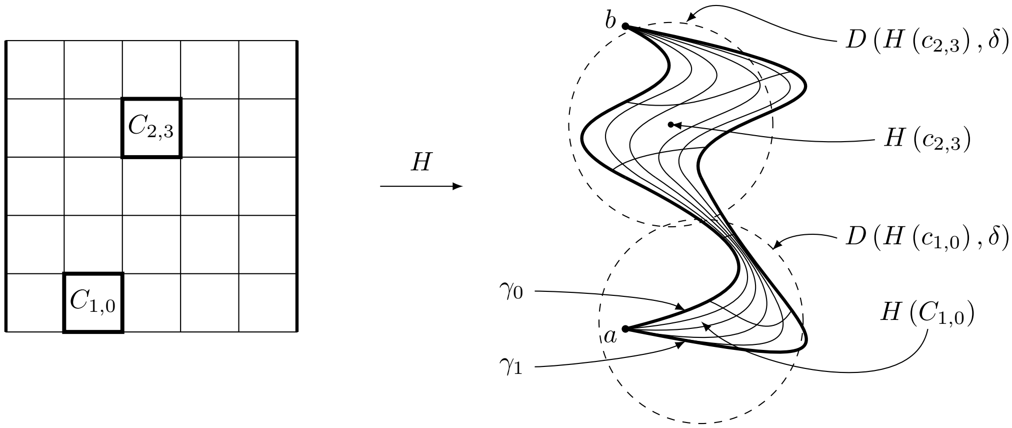
Puisque $H\left([0,1]^2\right) \subseteq U$ est compact — c'est l'image continue d'un compact —, sa distance au fermé $\mathbb{C} \setminus U$ qu'il ne rencontre pas est strictement positive. [C'est un résultat général de topologie métrique : d'abord, si F est fermé et si $k \notin F$, alors la distance de k à F, savoir $d(k,F) = \inf\{d(k,f),\ f \in F\}$ est strictement positive. En effet, puisque $\mathbb{C} \setminus F$ est ouvert, soit $r > 0$ tel que $D(x,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus F$; alors, $d(k,F) \geq r > 0$. Ensuite, si F est fermé , si K est compact et si $K \cap F = \emptyset$, alors la distance de K à F, savoir $d(K,F) = \inf\{d(k,f),\ k \in K,\ f \in F\}$, est encore strictement positive. En effet, l'application $x \in \mathbb{C} \mapsto d(x,F)$ est continue (exercice) sur le compact K. Elle y atteint donc sa borne inférieure : soit $k \in K$ tel que $d(K,F) = d(k,F)$. D'après ce qui précède, $d(k,F) > 0$ et voilà.]
Soit $\delta = d\left(H\left([0,1]^2\right), \mathbb{C} \setminus U\right) > 0$ cette distance. Alors, $D(z,\delta) \subseteq U$, pour tout $z \in H\left([0,1]^2\right)$. En particulier, le théorème d'existence locale de primitives assure que f admet une primitive sur tous les disques ouverts $D(z,\delta)$ où $z \in H\left([0,1]^2\right)$.

Pour chaque entier naturel non nul n, on découpe l'intervalle $[0,1]$ en les n intervalles $I_k = [a_k, a_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, où $a_k = \frac{k}{n}$ — à vrai dire, on devrait noter I_k avec un double indice mentionnant n, mais on choisira un n plus bas ; ainsi, pour alléger, on s'abstient. Alors, le carré $[0,1]^2$ est découpé en les n^2 sous-carrés $C_{k,\ell} = I_k \times I_\ell$, $0 \leq k, \ell \leq n-1$ qui ont tous $\frac{1}{n}$ pour longueur d'arête.



Les $C_{k,\ell}$ dans le cas $n = 5$

On note aussi $c_{k,\ell}$ le centre du sous-carré $C_{k,\ell}$. Comme la fonction H est uniformément continue — elle est continue sur le compact $[0,1]^2$ —, on choisit n de sorte que $H(C_{k,\ell})$ soit dans le disque ouvert $D(H(c_{k,\ell}), \delta)$, pour tout $(k,\ell) \in \{0, \ldots n-1\}^2$. [Dans le jargon, $\frac{1}{n\sqrt{2}}$ est un module de continuité uniforme de H pour δ.]



Alors, la fonction f admet des primitives sur chacun des disques ouverts $D\left(H\left(c_{k,\ell}\right),\delta\right)$, c'est une conséquence du choix de δ. On note $F_{k,\ell}$ une primitive (holomorphe) de f sur l'ouvert $D\left(H\left(c_{k,\ell}\right),\delta\right)$, pour tous $0\leq k,\ell\leq n-1$. En particulier, en notant $\gamma_{0|I_\ell}$ la restriction de γ_0 à l'intervalle I_k — c'est encore un chemin —,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{\gamma_{0|I_\ell}} f(z)dz=\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} f\left(\gamma_0(t)\right)\gamma_0'(t)dt.$$

Or, pour tout $t\in I_\ell$, $\gamma_0(t)=H(0,t)\in H\left(C_{0,\ell}\right)$; ainsi $\gamma_0\left(I_\ell\right)$ est dans le domaine de définition de $F_{0,\ell}$, de sorte que $f\left(\gamma_0(t)\right)=F_{0,\ell}'\left(\gamma_0(t)\right)$. Alors, le théorème fondamental de l'analyse assure que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} f(z)dz &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} F_{0,\ell}'\left(\gamma_0(t)\right)\gamma_0'(t)dt\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\left[F_{0,\ell}\left(\gamma_0\left(a_{\ell+1}\right)\right)-F_{0,\ell}\left(\gamma_0\left(a_\ell\right)\right)\right]\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\left[F_{0,\ell}\circ H\left(a_0,a_{\ell+1}\right)-F_{0,\ell}\circ H\left(a_0,a_\ell\right)\right]\end{aligned}\tag{12}$$

puisque $a_0=0$. De même, puisque $a_n=1$,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[F_{n-1,\ell}\circ H\left(a_n,a_{\ell+1}\right)-F_{n-1,\ell}\circ H\left(a_n,a_\ell\right)\right].\tag{13}$$

[Noter qu'on a fait ici comme si γ_0 et γ_1 étaient de classe $\mathcal{C}^1$. S'ils ne sont que de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il faut raffiner ces sommes en ajoutant une subdivision des I_k qui tienne compte des sauts de dérivée de γ_0 et γ_1. Quoi qu'il en soit, les formules (12) et (13) restent valides telles qu'elles sont écrites.]

L'idée qui suit consiste à calculer les intégrales de f le long de tous les $t\mapsto H\left(a_k,t\right)$ qui prendront la même forme que dans les formules (12) et (13), d'utiliser que deux primitives diffèrent d'une constante sur un connexe et de faire jouer le fait que tous les $t\mapsto H\left(a_k,t\right)$ prennent la même valeur en 0 et la même valeur en 1 puisque qu'ils sont tous homotopes. Hélas, on n'a fait aucune hypothèse de différentiabilité sur l'homotopie H, de sorte que les $t\mapsto H\left(a_k,t\right)$ ne sont pas des chemins sur lesquels on peut intégrer f. Il n'empêche, on mime ces intégrales en les remplaçant par les sommes $\mathcal{I}_k$ qui suivent. [Ensuite, comme on dirait dans le jargon, il n'y a plus qu'à écrire les "relations de cobord", qui sont une manière de nommer les annulations dans les sommes ci-dessous et qu'on rencontre dans d'autres situations mathématiques, notamment dans le calcul (co)homologique.]

Pour chaque $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, on note

$$\mathcal{I}_k=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left[F_{k,\ell}\circ H\left(a_k,a_{\ell+1}\right)-F_{k,\ell}\circ H\left(a_k,a_\ell\right)\right]$$

— que l'on gagne à penser comme "l'intégrale de f le long du "chemin" $t \in [0,1] \mapsto H(a_k, t)$". Bien sûr,

$$\mathcal{I}_0 = \int_{\gamma_0} f(z)dz,$$

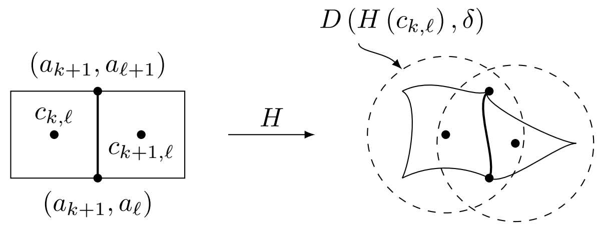
c'est la formule (12). Alors, on montre que

$$\forall k \in \{0, \ldots n-1\}, \ \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k+1}.$$

En effet,

$$\mathcal{I}_k - \mathcal{I}_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Big[F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_\ell) - F_{k+1,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1}) + F_{k+1,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_\ell) \Big].$$

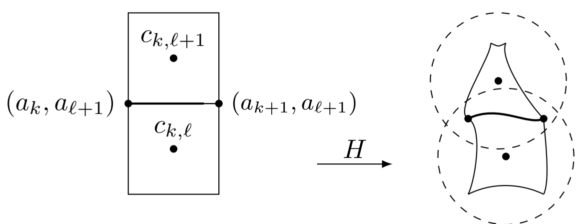
Or, l'intersection des disques $D(H(c_{k,\ell}), \delta)$ et $D(H(c_{k+1,\ell}), \delta)$ est convexe donc connexe ; ainsi, puisque les fonctions $F_{k+1,\ell}$ et $F_{k,\ell}$ sont deux primitives de f, leur différence $F_{k+1,\ell} - F_{k,\ell}$ est constante sur ce connexe. Puisque l'image par H du segment $[(a_{k+1}, a_\ell), (a_{k+1}, a_{\ell+1})]$ est dans ce connexe, on en déduit que



$$F_{k+1,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1}) - F_{k+1,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_\ell) = F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_\ell)$$

— dans les deux derniers termes du crochet, on peut remplacer $F_{k+1,\ell}$ par $F_{k,\ell}$. Ainsi, en intervertissant aussi les deux termes centraux du crochet,

$$\mathcal{I}_k - \mathcal{I}_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} [F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_\ell) + F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_\ell)].$$



A nouveau, l'intersection des disques $D(H(c_{k,\ell}), \delta)$ et $D(H(c_{k,\ell+1}), \delta)$ est convexe donc connexe ; ainsi, puisque les fonctions $F_{k,\ell}$ et $F_{k,\ell+1}$ sont deux primitives de f, leur différence $F_{k,\ell+1} - F_{k,\ell}$ est constante sur ce connexe. Puisque l'image par H du segment $[(a_k, a_{\ell+1}), (a_{k+1}, a_{\ell+1})]$ est dans ce connexe, on en déduit que

$$F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1}) = F_{k,\ell+1} \circ H(a_k, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell+1} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1})$$

— dans les deux premiers termes du crochet, on peut remplacer $F_{k,\ell}$ par $F_{k,\ell+1}$. On obtient alors

$$\mathcal{I}_k - \mathcal{I}_{k+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Big([F_{k,\ell+1} \circ H(a_k, a_{\ell+1}) - F_{k,\ell+1} \circ H(a_{k+1}, a_{\ell+1})] - [F_{k,\ell} \circ H(a_k, a_\ell) - F_{k,\ell} \circ H(a_{k+1}, a_\ell)] \Big)$$

où l'on voit que, à k fixé, les deux crochets sont tous de la forme $\alpha_{\ell+1} - \alpha_\ell$. Leur sommation ne laisse plus que la différence des termes de bords, savoir

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k - \mathcal{I}_{k+1} &= \Big[F_{k,n} \circ H(a_k, 1) - F_{k,n} \circ H(a_{k+1}, 1) \Big] - \Big[F_{k,0} \circ H(a_k, 0) - F_{k,0} \circ H(a_{k+1}, 0) \Big] \\ &= \Big[F_{k,n}(b) - F_{k,n}(b) \Big] - \Big[F_{k,0}(a) - F_{k,0}(a) \Big] = 0 \end{aligned}$$

puisque, par définition de l'homotopie, tous les $H(s,0)$ valent a et tous les $H(s,1)$ valent b. Ainsi, on a montré que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{n-1}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\mathcal{I}_{n-1} = \int_{\gamma_1} f(z)dz,$$

ce qui se fait encore par le même raisonnement qui conduisit plus haut à $\mathcal{I}_0 = \int_{\gamma_0} f(z)dz = \mathcal{I}_1$: on a encore successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n-1} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[F_{n-1,\ell} \circ H\left(a_{n-1}, a_{\ell+1}\right) - F_{n-1,\ell} \circ H\left(a_{n-1}, a_\ell\right)\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[F_{n-1,\ell} \circ H\left(a_n, a_{\ell+1}\right) - F_{n-1,\ell} \circ H\left(a_n, a_\ell\right)\right] = \int_{\gamma_1} f(z)dz.
\end{aligned}$$

■

A noter
L'idée globale de cette preuve consiste à utiliser l'existence locale de primitives de f pour montrer que les intégrales de f le long de tous les chemins déformés $t \mapsto H(s,t)$ sont toutes les mêmes. Cette idée trouve une réalisation technique au prix du contournement d'écueils que l'on décrit dans la preuve. D'autres méthodes de contournement sont possibles, que l'on laisse ici de côté — approcher les faux chemins $t \mapsto H(s,t)$ par des vrais chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par exemple, ou encore prendre un peu de hauteur théorique et traiter préalablement l'intégration de formes différentielles.

Corollaire (intégration d'une fonction holomorphe le long d'un lacet homotope à zéro)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit aussi γ un lacet de U, homotope à zéro dans U. Alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème d'invariance par homotopie des chemins, puisque l'intégrale le long d'un lacet de longueur nulle est nulle. ■

Corollaire (l'indice est un invariant d'homotopie)
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_0 et γ_1 deux lacets de U. On suppose que γ_0 et γ_1 sont U-homotopes. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus U, \;\; \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z).$$

Preuve. Si $z \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe sur U. On applique le théorème d'invariance des intégrales de fonctions holomorphes le long de lacets homotopes. ■

A noter
En particulier, *si $z \in \mathbb{C}$ et si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, alors* $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$.

Exercice 38
Un cercle parcouru une fois dans le sens direct et le même cercle parcouru deux fois dans le sens direct ne sont pas homotopes dans le plan complexe privé du centre du cercle.

Théorème (formule globale de Cauchy)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit γ un lacet de U, homotope à zéro dans U. Alors,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \times f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{14}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\gamma)$.

Preuve. On note g l'application définie sur $U \times U$ par

$$g(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} & \text{si} \;\; z \neq \zeta \\[2ex] f'(z) \;\; \text{si} \;\; z = \zeta. \end{cases}$$

Puisque f est holomorphe, g est continue — pour le voir simplement, écrire par exemple g sous forme intégrale : $g(z,\zeta)=\int_0^1 f'(\zeta+t(z-\zeta))dt$, dès lors que $[\zeta,z]\subseteq U$. En outre, pour tout $z\in U$, l'application $g_z:\zeta\mapsto g(z,\zeta)$ est holomorphe sur U. En effet, elle est évidemment dérivable au sens complexe sur $U\setminus\{z\}$ et par ailleurs,

$$\frac{g_z(\zeta)-g_z(z)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)-f(z)-(\zeta-z)f'(z)}{(\zeta-z)^2}\underset{\zeta\to z}{\longrightarrow}\frac{1}{2}f''(z)$$

ce qui montre que g_z est dérivable en z et que sa dérivée en z est $\frac{1}{2}f''(z)$ — noter que puisque f est holomorphe, elle est dérivable à tout ordre au sens complexe. Ainsi, puisque γ est homotope à zéro,

$$\forall z\in D,\ \int_\gamma g(z,\zeta)d\zeta=0.$$

Lorsque $z\notin \operatorname{Supp}(\gamma)$, cela s'écrit

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

ce qui permet de conclure, puisque le membre de gauche de cette égalité est $2i\pi\operatorname{Ind}_\gamma(z)f(z)$. ■

A noter

(i) La formule (14) est souvent appelée *formule (globale) de Cauchy.*

(ii) Le cas où l'indice de z par rapport à γ vaut 1 revêt une importance opératoire particulière.

4 La question des primitives et du relèvement de l'exponentielle

4.1 Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe

Le section précédente commence par une preuve de l'existence *locale* de primitives pour une fonction holomorphe. On a vu, par exemple avec la fonction $z \mapsto 1/z$ sur le disque ouvert épointé $D(0,1) \setminus \{0\}$, qu'une fonction holomorphe sur un ouvert n'a généralement pas de primitive *globale* sur cet ouvert. Ce paragraphe traite d'une condition suffisante sur un ouvert pour qu'une fonction qui y est holomorphe y admette une primitive.

Proposition (tout ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs)
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors, pour tous $u, v \in U$, il existe un chemin de U (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) dont l'origine est u et l'extrémité v.

Preuve. Soit $u \in U$. Pour tout $z \in U$, on dira que z *est relié à* u lorsqu'il existe un chemin de U (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) dont l'origine est u et l'extrémité z. Soit $f : U \to \{0,1\}$ l'application définie par : $f(z) = 1$ si z est relié à u et $f(z) = 0$ sinon. On montre que f est localement constante. Puisque U est connexe et puisque $f(u) = 1$, cela montre que $f \equiv 1$, ce qu'il fallait démontrer.
Soit $z \in U$ tel que $f(z) = 1$. Soit alors γ un chemin de U reliant u à z. Puisque U est ouvert, soit $r > 0$ tel que $D(z,r) \subseteq U$. Alors, pour tout $w \in D(z,r)$, la concaténation de γ et du segment $S(z,w)$ est un chemin qui relie u à w. Cela montre que f est constante, égale à 1 sur $D(z,r)$. Le même raisonnement montre que si $f(z) = 0$ et si $D(z,r) \subseteq U$, aucun point de $D(z,r)$ n'est relié à u ; ainsi, f est nulle sur $D(z,r)$. On a montré que f est localement constante ■

A noter
Une partie U de $\mathbb{C}$ est dite *connexe par arcs* lorsque $\forall u, v \in U$, $\exists \gamma : [0,1] \to U$, continue, telle que $\gamma(0) = u$ et $\gamma(1) = v$. La proposition qui précède montre en particulier que tout ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

Exercice 39 Tout connexe par arcs est connexe.

Définition (simplement connexe)
Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *simplement connexe* lorsqu'elle est non vide et lorsque tout lacet de A est A-homotope à zéro.

A noter
Certains auteurs ajoutent la connexité à la définition de la simple connexité, en disant qu'une partie de $\mathbb{C}$ est simplement connexe lorsqu'elle est connexe et lorsque tout lacet y est homotope à zéro.

Exercice 40
Montrer que A est simplement connexe si, et seulement si toutes les composantes connexes de A le sont.

Exemples
(i) **Proposition** *Tout étoilé est simplement connexe.*

Preuve. Soient A une partie étoilée de $\mathbb{C}$, a un centre de A et γ un lacet standard de A d'origine a. Alors, l'application

$$(s,t) \mapsto sa + (1-s)\gamma(t)$$

est une A-homotopie entre γ et le lacet constant égal à a. Soit maintenant un lacet γ d'origine quelconque $u \in A$, et soit c un chemin standard d'origine u et d'extrémité a. On note $c^{-1} : t \mapsto c(1-t)$ le chemin inverse de c. Alors, le lacet $c^{-1}\gamma c$ a pour origine a. Selon ce qui précède, il est donc homotope à zéro. On conclut en utilisant le dernier exercice de la section 1.2.2 et l'exemple qui le précède : d'abord, le lacet $\gamma c c^{-1}$ ne diffère de $c^{-1}\gamma c$ que par un changement d'origine ; puisque ce dernier, est homotope à zéro, $\gamma c c^{-1}$ l'est aussi. Enfin, γ est homotope à zéro puisque $\gamma c c^{-1}$ l'est. ■

(ii) **Proposition** *Tout convexe est simplement connexe.*

Preuve. Tout convexe est étoilé. ■

(iii) **Proposition (union de deux simplement connexes, vers van Kampen♫)**
Si U et V sont deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ et si $U \cap V$ est connexe, alors $U \cup V$ est simplement connexe.

♫Egbert van Kampen, 1908–1942

Preuve. Soient $u \in U \cap V$ et γ un lacet standard de $U \cup V$ d'origine u. Puisque γ est continu, $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont des ouverts de l'intervalle $[0,1]$. On écrit chacun de ces deux ouverts comme unions d'intervalles disjoints $\mathcal{I}_a$, $a \in A$ ouverts dans $[0,1]$. Les intervalles ouverts $\mathcal{I}_a$ recouvrent le compact $[0,1]$; on extrait de ce recouvrement un recouvrement fini

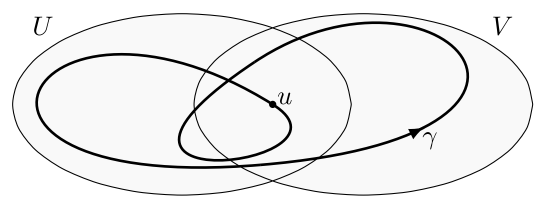
$$[0,1] = \bigcup_{k=0}^{n+1} J_k$$

où

- J_0 est de la forme $[0, b_0[$, $0 < b_0 < 1$;
- J_{n+1} est de la forme $]a_{n+1}, 1]$, $0 < a_{n+1} < 1$;
- $J_k =]a_k, b_k[$ est un intervalle ouvert non vide, pour tout $k \in \{1, \dots n\}$;
- $0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-2} < a_n < b_{n-1} < a_{n+1} < b_n < 1$;
- $J_0, J_2, J_4 \cdots \subseteq \gamma^{-1}(U)$ et $J_1, J_3, J_5 \cdots \subseteq \gamma^{-1}(V)$ — quitte à échanger U et V.

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n+1\}$, on choisit un nombre $c_k \in J_k \cap J_{k+1}$. On note aussi $c_0 = 0$ et $c_{n+2} = 1$ de sorte que

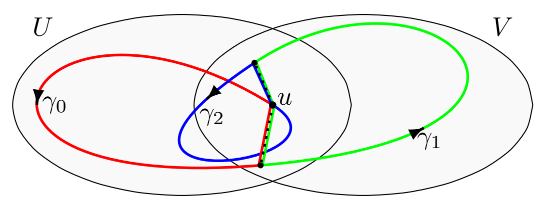
$$[0,1] = \bigcup_{k=0}^{n+1} [c_k, c_{k+1}]$$



où

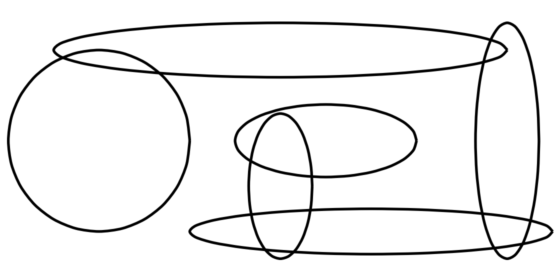
(a) $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n+1} < c_{n+2} = 1$;
(b) $\forall k \in \{0, \dots, n+2\}$, $\gamma(c_k) \in U \cap V$;
(c) $\gamma([c_0, c_1]), \gamma([c_2, c_3]) \cdots \subseteq U$
(d) $\gamma([c_1, c_2]), \gamma([c_3, c_4]) \cdots \subseteq V$.

En notant γ_k la restriction de γ à l'intervalle $[c_k, c_{k+1}]$, cela entraîne que γ est le concaténé $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$. Puisque tous les points $\gamma(c_k)$ sont dans $U \cap V$, et puisque $U \cap V$ est connexe, on note δ_k un chemin standard de $U \cap V$ joignant $\gamma(c_k)$ à u et $\delta_k^{-1} : t \mapsto \delta_k(1-t)$ le chemin inverse. Dans ces conditions, chaque $\delta_k^{-1}\gamma_k\delta_{k+1}$ est un lacet de U ou un lacet de V, tous d'origine u ; comme U et V sont simplement connexes, tous les $\delta_k^{-1}\gamma_k\delta_{k+1}$ sont homotopes à zéro dans $U \cup V$.

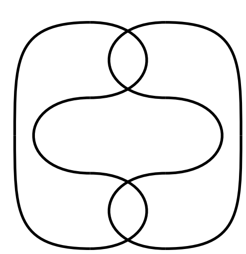


Par ailleurs, ajouter un aller-retour ne modifie pas la classe d'homotopie de sorte que $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ et $(\delta_0\gamma_0\delta_1)\left(\delta_1^{-1}\gamma_1\delta_2\right)\left(\delta_2^{-1}\gamma_3\delta_3\right)\dots\left(\delta_{n-1}^{-1}\gamma_{n-1}\delta_n\right)\left(\delta_n^{-1}\gamma_n\delta_{n+1}^{-1}\right)(\delta_{n+1}\gamma_{n+1}\delta_{n+2})$ ont le même classe d'homotopie — noter qu'on peut choisir les lacets γ_0 et γ_{n+2} comme étant le lacet constant égal à u. Comme ce long concaténé est un concaténé de lacets homotopes à zéro, γ est homotope à zéro.
Enfin, si γ est un lacet de $U \cup V$ dont l'origine n'est pas dans $U \cap V$, si son support est dans U ou dans V, il est homotope à zéro dans $U \cup V$ puisque U et V sont simplement connexes ; si son support rencontre $U \cap V$, il est aussi homotope à zéro dans $U \cup V$ d'après ce qui précède, puisqu'un décalage de son origine en un point de $U \cap V$ est homotope à zéro. ■

Exemples



Simplement connexe



Non simplement connexe

A noter
On peut considérer ce résultat comme un prélude au magnifique théorème de van Kampen, dont l'énoncé seul nous emmènerait sur des rivages de la topologie algébrique, trop éloignés du présent propos.

Proposition (une fonction holomorphe a des primitives sur les ouverts simplement connexes)
Soient U un ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors, f admet une primitive sur U.

Preuve. Soient $u, z \in U$. Soient également γ_0 et $\gamma_1 : [a, b] \to U$ deux chemins de U d'origine u et d'extrémité z. On note $\gamma_1^{-1} : t \mapsto \gamma_1(a + b - t)$ le chemin inverse de γ_1. Alors, le chemin concaténé $\gamma_0\gamma_1^{-1}$ est un lacet de U. Il est donc U-homotope à zéro, ce qui entraîne, par invariance des intégrales de fonctions holomorphes par homotopie des chemins, que $\oint_{\gamma_0\gamma_1^{-1}} f(\zeta)d\zeta = 0$, ou autrement dit que $\oint_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta = \oint_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta$. Cela montre que l'intégrale de f le long d'un chemin reliant u à z ne dépend pas du chemin, mais seulement de ses bouts u et z. Or, puisque U est connexe, tout point de U est relié à u par un chemin ; on peut ainsi définir l'application $F : U \to \mathbb{C}$ par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

où γ_z est *n'importe quel* chemin d'origine u et d'extrémité z. Il reste à montrer que F est une primitive de f — mieux, puisque U est connexe, que F est la primitive de f qui s'annule en u.
Soit $z \in U$. Soit $r > 0$ tel que $D(z, r) \subseteq U$. Alors, comme on l'a vu dans le théorème d'existence locale de primitives pour une fonction holomorphe, pour tout $w \in D(z, r)$, l'intégrale de f le long du segment $S(z, w)$ est une primitive de f ; or, $F(w) = F(z) + \oint_{S(z,w)} f(\zeta)d\zeta$, ce qui montre que F est holomorphe sur $D(z, r)$ et que c'est une primitive de f sur ce disque. On a montré que F est holomorphe sur U et que c'est une primitve de f sur U. ■

A noter
(i) Dans les conditions de l'énoncé, puisque U est connexe, toutes le primitives de f diffèrent d'une constante.

(ii) Retenir que, dans les conditions de l'énoncé, pour tout $u \in U$, l'application $F(z) = \oint_{u \rightsquigarrow z} f(\zeta)d\zeta$ — où la notation $u \rightsquigarrow z$ désigne n'importe quel chemin d'origine u et d'extrémité z — est d'une part bien définie, d'autre part est une primitive de f.

4.2 Relèvement de l'exponentielle, logarithmes

Proposition (l'exponentielle se relève sur les simplement connexes)
Soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que f ne s'annule pas. Alors, il existe $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = \exp(g)$.

Preuve. La fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur le simplement connexe U : soit g_0 une primitive de $\frac{f'}{f}$ sur U. Alors, la fonction holomorphe fe^{-g_0} a une dérivée nulle sur U : elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de U. Soit V une composante connexe de U et $K_V \in \mathbb{C}$ tel que $fe^{-g_0} \equiv K_V$ sur V. Puisque f ne s'annule pas, $K_V \neq 0$; soit donc $C_V \in \mathbb{C}$ tel que $K_V = e^{C_V}$. Alors, $f = \exp(g_0 + C_V)$ sur V. La fonction $g : U \to \mathbb{C}$ dont la restriction à chaque composante connexe V est $g_0 + C_V$ convient : elle est holomorphe sur U et vérifie $f = e^g$. ■

A noter
(i) Dans les conditions de la proposition précédente, on dit que la fonction g est un *relèvement holomorphe* de f par l'exponentielle. On illustre parfois cette situation par le diagramme commutatif ci-contre.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$

(ii) Dans les conditions de l'énoncé, lorsque U est connexe, deux relèvements de f diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.
En effet, si $f = e^{g_1} = e^{g_2}$ où g_1 et g_2 sont holomorphes sur U, alors $e^{g_1 - g_2} \equiv 1$ et $g_1 - g_2$ est continue sur le connexe U. Donc $g_1 - g_2$, qui prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$, est constante, égale à un multiple de $2i\pi$.

Définition (déterminations du logarithme)
Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Une *détermination (continue) du logarithme* est une application continue $L : A \to \mathbb{C}$ telle que $e^{L(z)} = z$, pour tout $z \in A$.

A noter

(i) Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, une détermination du logarithme ne peut être définie sur aucune partie de $\mathbb{C}$ contenant 0.

(ii) Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, en écrivant w sous forme géométrique $w = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et où $\theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions complexes de l'équation $e^z = w$ est $\ln r + i\,(\theta + 2\pi\mathbb{Z})$. Autrement dit, tout logarithme de w est de la forme $\ln|w| + i\arg w$ où $\arg w$ est n'importe quel argument de w. Ainsi, chercher une détermination continue du logarithme sur une partie de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ revient à chercher une détermination continue de l'argument.

Proposition (déterminations du logarithme sur un ouvert simplement connexe)
Soit U un ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Il existe des déterminations continues du logarithme sur U.

(ii) Toute détermination continue du logarithme sur U est holomorphe.

(iii) Si L et M sont deux déterminations du logarithme sur U, alors l'application $L - M$ est constante sur U, égale à un multiple de $2i\pi$.

Preuve. (i) Par définition, les déterminations du logarithme sur U sont les relèvements de la fonction holomorphe $\mathrm{id}_U : z \mapsto z$ par l'exponentielle. On applique le théorème de relèvement qui précède.
(ii) et (iii) Soit L une détermination holomorphe du logarithme sur U, et M une détermination continue du logarithme sur U. Alors, l'application continue e^{L-M} est la fonction constante égale à 1 sur U. Ainsi, l'application continue $L - M$, continue sur le connexe U, est à valeur dans la partie discrète $2i\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$: elle est constante. Donc M est holomorphe. ■

A noter

(i) Si L est une détermination du logarithme sur un ouvert simplement connexe U, la dérivation de la relation $\exp \circ L(z) = z$ montre que $\frac{d}{dz}L(z) = \frac{1}{z}$, pour tout $z \in U$. Autrement dit, toute détermination du logarithme est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$.

(ii) Il n'existe pas de détermination du logarithme sur un ouvert "entourant 0" : *si V est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et si $U = V \setminus \{0\}$, il n'y a pas pas détermination du logarithme sur U.*

En effet, on l'a vu, $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive U — on redonne une raison "à la Cauchy" : l'intégrale de $\frac{1}{z}$ sur un lacet de U dont l'indice par rapport à l'origine est 0 n'est pas nul n'est pas nulle.

Définition (logarithme principal)
La fonction *logarithme principal* est la détermination continue du logarithme sur l'ouvert connexe et simplement connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui vaut 0 en 1 ; on le note Log, ou encore log. On l'appelle aussi *détermination principale du logarithme*, ou encore *logarithme* (tout court).

Autrement dit, Log est l'unique application holomorphe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ qui vérifie
(i) $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$;

(ii) $\mathrm{Log}\, 1 = 0$.

A noter

(i) L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est souvent appelé *plan coupé principal*, ou même parfois *plan coupé* (tout court).

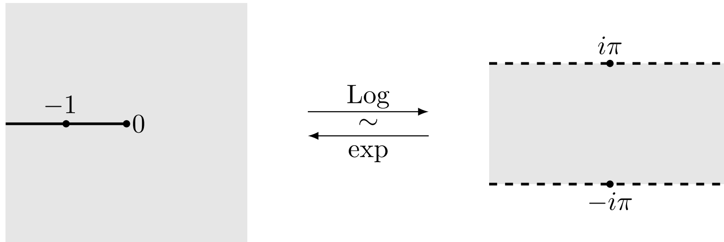
(ii) Le logarithme principal est *la* primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui s'annule en 1.

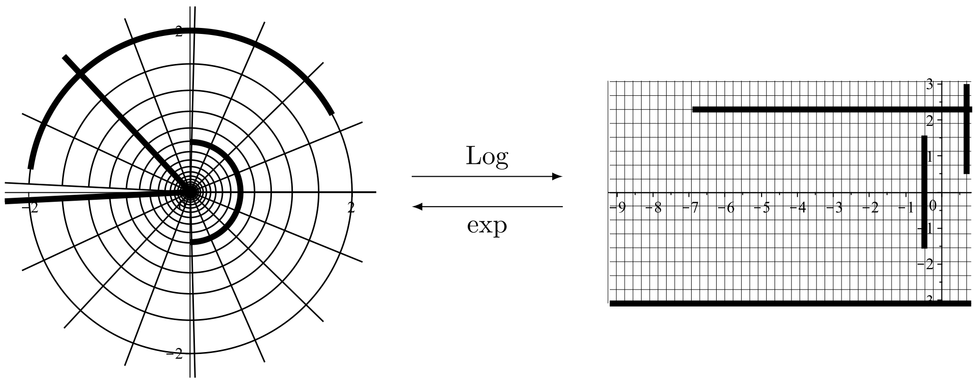
(iii) La restriction de Log à $]0, +\infty[$ est le logarithme népérien, réciproque de la restriction de l'exponentielle à l'axe réel, comme l'assure (ii). On le notera ln selon l'usage.

(iv) L'*argument principal* d'un nombre complexe non nul est son unique argument contenu dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On prolonge usuellement le logarithme principal en un application $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ en utilisant l'argument principal — ce prolongement est discontinu en tout point de $\mathbb{R}_{<0}$. Le lien entre le logarithme principal et l'argument principal est ainsi

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\ \ \mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

(v) La relation $\exp \circ \mathrm{Log} = \mathrm{id}_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-}$ montre que le logarithme principal est injectif. Le point (iv) entraîne immédiatement que son image est la bande $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C},\ -\pi < \Im z < \pi\}$. Ainsi, le logarithme principal est une bijection holomorphe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathcal{B}$ dont la réciproque, qui est l'exponentielle, est également holomorphe.





(vi) Attention à ne pas abusivement prolonger au logarithme principal les formules usuelles valides pour le logarithme népérien. Par exemple, sans autres formes de commentaires,

$$\text{(a) } \operatorname{Log}\left(e^{\frac{3i\pi}{2}}\right) = -\frac{i\pi}{2}$$

$$\text{(b) } \operatorname{Log}\left[i \times (-1+i)\right] = \operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(-1+i) + 2i\pi$$

$$\text{(c) } \operatorname{Log}(-1+i)^2 = 2\operatorname{Log}(-1+i) - 2i\pi$$

Exercice 41
Trouver tous les nombres complexes z pour lesquels les formules suivantes sont valides et dessiner leur ensemble.
(a) $\operatorname{Log}(e^z) = z$
(b) $\operatorname{Log}(e^z) = z + 6i\pi$
(c) $\operatorname{Log}(xz) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} z$, où $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est donné
(d) $\operatorname{Log}(xz) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} z - 2i\pi$, où $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est donné

(vii) Soit $r > 0$. Puisque $\oint_{C(0,r)} \frac{dz}{z} \neq 0$, il n'existe de détermination continue du logarithme sur aucun ouvert contenant $D(0,r) \setminus \{0\}$.

(viii) Si $D_\theta = \left\{re^{i\theta},\ r > 0\right\}$ est n'importe quelle demi-droite du plan issue de l'origine, alors $\mathbb{C} \setminus D_\theta$ est étoilé, donc connexe et simplement connexe. Par conséquent, les déterminations continues du logarithme sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus D_\theta$ forment une famille de fonctions indexée par $\mathbb{Z}$. Par exemple, il existe une unique fonction holomorphe L sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ qui vérifie $L(-1) = 0$ et $e^{L(z)} = z$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

4.3 Relèvement des puissances, fonctions racines carrées, cubiques, etc

Proposition (les puissances se relèvent sur les simplement connexes)
Soient n un entier naturel non nul, U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que f ne s'annule pas. Alors, il existe $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = g^n$.

Preuve. Par le théorème de relèvement de l'exponentielle, soit $h \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = e^h$. La fonction $g = \exp\left(\frac{1}{n}h\right)$ convient. ■

Définition (ordre d'une fonction holomorphe en un point)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si f n'est pas constante au voisinage de u, l'*ordre de f en u* est l'entier naturel

$$\mathrm{ord}_u(f) = \min\left\{n \geq 1,\ f^{(n)}(u) \neq 0\right\}\ ;$$

Autrement dit, f est d'ordre $m \geq 1$ en u lorsque le DSE de f en u est de la forme

$$f(z) = f(u) + \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-u)^n$$

avec $a_m \neq 0$. Par extension, lorsque f est constante sur la composante connexe de U contenant u, on dit que f est *d'ordre* 0 *en* u.

A noter
Selon le contexte, l'ordre de f en u s'appelle aussi *valuation de f en u*, ou encore *multiplicité de f en u*.

Exemples
$z \mapsto \sin z^2$ est d'ordre 2 en 0 et $z \mapsto \cos z^2$ est d'ordre 4 en 0.

Proposition (forme locale d'une fonction holomorphe, lemme de revêtement version 1)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$, non constante. Soit $m \geq 1$ l'ordre de f en u. Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{C}$ et $h \in \mathcal{O}(V)$ telles que $u \in V \subseteq U$, $h(u) \neq 0$ et

$$\forall z \in V,\ f(z) = f(u) + \left[(z-u)h(z)\right]^m. \tag{15}$$

Preuve. Puisque f n'est pas constante et puisque U est connexe, le DSE de f en u n'est pas constant : soient $\sum_n a_n$ la série entière de rayon non nul et $R > 0$ tels que $a_0 \neq 0$ et

$$\forall z \in D\left(u, R\right),\ f(z) = f(u) + (z-u)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-u)^n.$$

On note g l'application holomorphe définie sur $D\left(u, R\right)$ par la formule $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-u)^n$. Puisque $a_0 \neq 0$, soit $r \in]0, R[$ tel que g ne s'annule pas sur $D\left(u, r\right)$. Comme $D\left(u, r\right)$ est simplement connexe, en appliquant le théorème de relèvement par la puissance m^{e}, soit h, holomorphe sur $D\left(u, r\right)$, telle que $g = h^m$. Alors, h convient. ■

Définition (déterminations de la racine n^{e})
Soient n un entier naturel non nul et A une partie de $\mathbb{C}$. Une *détermination de la racine n^{e} sur A* est une application f holomorphe sur A qui vérifie $f(z)^n = z$, pour tout $z \in A$.

A noter
(i) Puisqu'une détermination f de la racine n^{e} vérifie $nf^{n-1}f' \equiv 1$, d'une part, une détermination de la racine n^{e} ne s'annule sur aucun ouvert et, d'autre part, il n'existe de détermination de la racine n^{e} sur aucun ouvert contenant 0.

(ii) Une détermination de la racine n^{e} sur un ouvert U est un relèvement sur U de l'application identique $z \mapsto z$ par la fonction $z \mapsto z^n$.

Proposition (déterminations de la racine n^{e} sur un ouvert simplement connexe)
Soit U un ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(i) Si $L : U \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur U, alors l'application $R : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{n}L(z)\right)$ est une détermination de la racine n^{e} sur U.

(ii) Les déterminations de la racine n^{e} sur U sont exactement les n applications ωR où ω est une racine n^{e} arbitraire de l'unité et R n'importe quelle détermination de la racine n^{e} sur U.

Preuve. (i) L'application R est holomorphe et il suffit de calculer : $\left[\exp\left(\frac{1}{n}L(z)\right)\right]^n = \exp \circ L(z) = z$.
(ii) Si S est une autre détermination de la racine n^{e} sur U, elle ne s'annule pas sur U et l'application $(R/S)^n$ est constante égale à 1 sur U. Le quotient R/S, qui est par conséquent à valeur dans l'ensemble fini des racines n^{e} de l'unité, est donc constant sur le connexe U. ■

Définition (détermination principale de la racine n^{e})
Soit n un entier naturel non nul. L'application holomorphe $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Log} z\right)$ est la *détermination principale* de la racine n^{e}. On la prolonge par la même formule en une application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, discontinue en tout point de $\mathbb{R}_{<0}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, on note

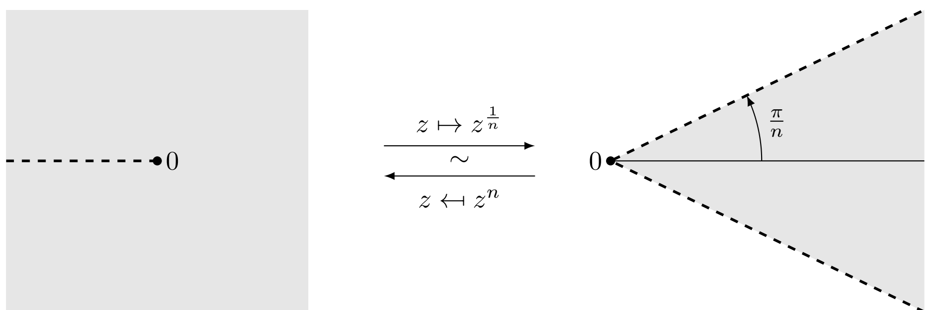
$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Log} z\right).$$

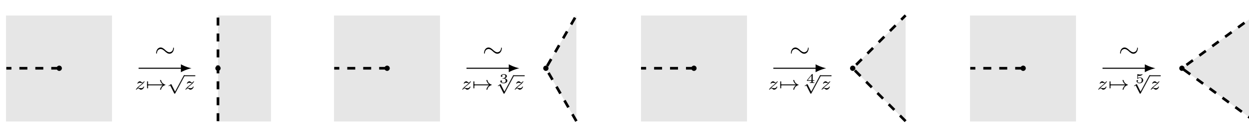
Exemples
$\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$, $\sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt{(-1+i)^2} = 1-i$, $\sqrt[3]{i^3} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = j^2 i$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. [Attention, là encore, à ne pas inventer de formules fausses qui sembleraient prolonger naturellement celles, bien connues, qui concernent les fonction racines n^{e} réelles.]

A noter
Puisque $z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}}$ où Arg désigne l'argument principal, l'image de la racine principale n^{e} est le secteur $\mathcal{S}_n = \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{n}\right\}$ et l'application $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ établit une bijection biholomorphe

$$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \xrightarrow{\sim} \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{n}\right\}$$

entre le plan coupé et l'intérieur de $\mathcal{S}_n$, dont la réciproque est bien sûr $z \mapsto z^n$.





4.4 Inversion locale holomorphe, théorème de l'application ouverte

En un point où sa dérivée ne s'annule pas, une fonction holomorphe est localement inversible au sens où elle établit une bijection biholomorphe au voisinage du point — on définit plus bas le sens de biholomorphe, qui tombe sous le sens. L'énoncé suivant précise cela.

Théorème (d'inversion locale holomorphe)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $u \in U$ tel que $f'(u) \neq 0$. Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{C}$ tel que
(i) $u \in V \subseteq U$
(ii) f est injective sur V
(iii) L'image $W = f(V)$ de V par f est un ouvert de $\mathbb{C}$
(iv) l'application réciproque $f_{|V}^{-1} : W \to V$ de la restriction de f à V est également holomorphe.

Preuve. On note g l'application définie sur $U \times U$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\[2ex] f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Puisque f est holomorphe, g est continue — et même holomorphe, on a déjà utilisée cette fonction auxiliaire dans la preuve du théorème global de Cauchy, page 46. Puisque $g(u,u) = f'(u) \neq 0$, soit V un voisinage ouvert de u tel que

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \ |g(x,y)| \geq \frac{1}{2}\,|f'(u)|\,.$$

En particulier,

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \ |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2}\,|f'(u)| \times |x-y|, \tag{16}$$

ce qui montre que f est injective sur V.

(iii) Pour montrer que $f(V)$ est ouvert, il s'agit de montrer que pour tout $v \in V$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in D\left(f(v), \delta\right)$, l'équation $f(z) - w$ a au moins une solution dans V.

Soit $v \in V$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}\,(v,r) \subseteq V$. On note $\partial D\,(v,r)$ le cercle de centre v et de rayon r. Alors, en vertue de (16), $|f(z) - f(v)| \geq \frac{r}{2}\,|f'(u)|$, pour tout $z \in \partial D\,(v,r)$. On note $\delta = \frac{r}{4}\,|f'(u)|$; ce réel est strictement positif. On montre que ce δ convient. Soit $w \in D\left(f(v), \delta\right)$. Alors, pour tout $z \in \partial D\,(v,r)$, la seconde inégalité triangulaire assure que $|w - f(z)| \geq |f(z) - f(v)| - |f(v) - w| > \delta$. Par conséquent, si la fonction $z \mapsto f(z) - w$ ne s'annulait pas sur $\overline{D}\,(v,r)$, le principe du module maximum entraînerait que le maximum sur $\overline{D}\,(v,r)$ de $z \mapsto \frac{1}{|f(z)-w|}$ serait atteint sur $\partial D\,(v,r)$, et donc que le minimum sur $\overline{D}\,(v,r)$ de $z \mapsto |f(z) - w|$, qui serait atteint sur $\partial D\,(v,r)$, serait strictement supérieur à δ ; en particulier, on aurait $|f(v) - w| > \delta$, ce qui entre en contradiction avec le fait que $w \in D\left(f(v), \delta\right)$: on a montré que la fonction $z \mapsto f(z) - w$ a une solution dans V — et même dans $\overline{D}\,(v,r)$ —, ce qui finit de montrer que $f(V)$ est ouvert.

(iv) En notant $W = f(V)$, on a montré que f établit une bijection entre V et W. On note f^{-1} sa réciproque — au lieu de $\left(f_{|V}\right)^{-1}$. On déduit de l'inégalité (16) que f' ne s'annule pas sur V. Soient $w_0 \in W$ et $w \in W \setminus \{w_0\}$. Alors,

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{f\left[f^{-1}(w)\right] - f\left[f^{-1}(w_0)\right]} \longrightarrow \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w_0)\right)}$$

lorsque w tend vers w_0, puisque f' ne s'annule pas sur V. Cela montre que f^{-1} est holomorphe. ∎

Définition (difféomorphisme analytique)
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \to V$ est un *difféomorphisme analytique* lorsqu'elle est holomorphe, bijective, et lorsque sa réciproque $f^{-1} : V \to U$ est également holomorphe. On dit aussi parfois que f est une *transformation holomorphe* (de U sur V), ou une application *biholomorphe*.

A noter

(i) Le théorème d'inversion locale holomorphe peut se dire ainsi : *toute fonction holomorphe f dont la dérivée ne s'annule pas est un difféomorphisme analytique local.*

Cela signifie que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, si $f \in \mathcal{O}(U)$ et si $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$, alors pour tout $u \in U$, il existe un voisinage ouvert V de u contenu dans U tel que la restriction de f à V soit un difféomorphisme analytique de V sur l'ouvert $f(V)$.

(ii) On peut aussi prouver les théorème d'inversion locale holomorphe en utilisant le théorème ordinaire d'inversion locale pour les fonctions complexes de deux variables réelles, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann et le fait que l'inverse d'une similitude directe est encore une similitude directe.

Proposition (une bijection holomorphe est un difféomorphisme analytique)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$.

(i) Si f est injective, alors f' ne s'annule pas.

(ii) Si f est une bijection holomorphe, alors f est un difféomorphisme analytique de U sur $f(U)$.

Preuve. (i) On suppose que $f'(u) = 0$ où $u \in U$. Soit alors $m \geq 2$ l'ordre de f en u. On applique le lemme de revêtement : soient V un voisinage ouvert de u et $h \in \mathcal{O}(V)$ telles que $h(u) \neq 0$ et $f(z) = f(u) + [(z-u)h(z)]^m$ pour tout $z \in V$. Alors, si $g : V \to \mathbb{C}$ désigne l'application définie par la formule $g(z) = (z-u)h(z)$, elle vérifie simultanément

$$\forall z \in V,\ \ f(z) = f(u) + g(z)^m \tag{17}$$

$g(u) = 0$ et et $g'(u) \neq 0$. On applique le théorème d'inversion locale holomorphe à g en u : soit W, voisinage ouvert de u contenu dans V, tel que le restriction de g à W soit un difféomorphisme analytique de W sur $g(W)$.

Puisque $g(W)$ est un voisinage ouvert de 0, soit $R > 0$ tel que $D(0, R) \subseteq g(W)$. Puisque $g^{-1}(D(0, R))$ est un voisinage ouvert de u, soit alors $r > 0$ tel que $D(u, r) \subseteq g^{-1}(D(0, R))$. Dans ces conditions, pour tout $z \in D(u, r)$ et pour toute racine m^{e} de l'unité ω, on a $\omega g(z) \in D(0, R)$ d'une part, et, d'autre part, grâce à (17), $f(z) = f\left[g^{-1}(\omega g(z))\right]$. Comme $m \geq 2$, cela entraîne que f n'est pas injective. Ainsi, l'hypothèse $f'(u) = 0$ ne tient pas. On a montré que la dérivée de f ne s'annule pas sur U dès lors que f est injective.

(ii) Puisque f est injective, f' ne s'annule pas. Le théorème d'inversion locale holomorphe montre alors que f^{-1} est holomorphe — et que sa dérivée vaut $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. ■

Définition (application ouverte)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *ouverte* lorsque l'image de tout ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

A noter

(i) C'est une notion topologique plus générale, qui ne se limite pas au cadre des applications complexes de la variable complexe. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite ouverte lorsque l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.

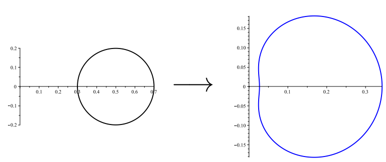
(ii) Une application continue et bijective n'a pas forcément une réciproque continue. Par exemple, l'application $[0, 2\pi[\to \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est continue et bijective, mais n'est pas un homéomorphisme puisque $[0, 2\pi[$ n'est pas compact alors que $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'est. En revanche, une application continue, bijective et ouverte est un homéomorphisme — sa réciproque est continue puisque l'image inverse d'un ouvert par ladite réciproque, qui est l'image directe dudit ouvert, est ouverte.

(iii) La composée de deux applications ouvertes est ouverte, c'est immédiat.

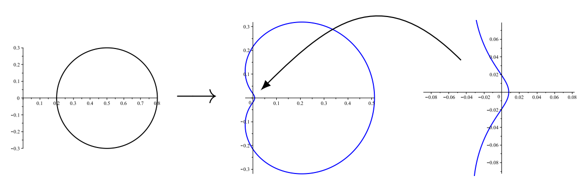
Exercice 42 (de topologie générale)
Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est ouverte si, et seulement si tout point de l'ensemble de départ a un voisinage dont l'image est ouverte.

Exemple
Pour tout entier naturel non nul n, l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est ouverte.
En effet, on note $p_n : z \mapsto z^n$. D'abord, si $r > 0$, alors $p_n(D(0, r)) = D(0, r^n)$. Ensuite, si V est un ouvert qui ne contient pas 0, alors p_n' ne s'annule pas sur V et le théorème d'inversion locale holomorphe montre que $p_n(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Ces deux dernières assertions suffisent à montrer que p_n est ouverte.

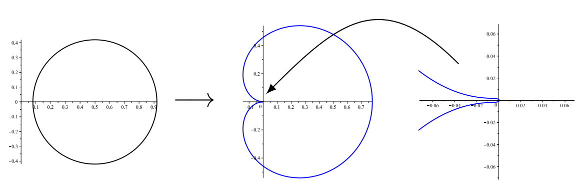
Images presque sans paroles
On regarde l'image par $z \mapsto z^3$ de cercles de centre $\frac{1}{2}$ et de rayons R divers et croissants.



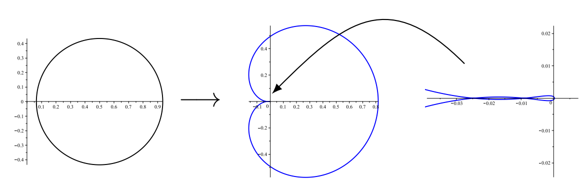
$R = 0,2$



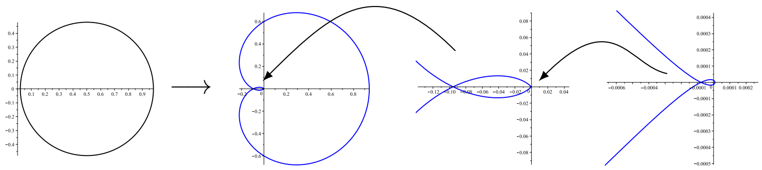
$R = 0,3$



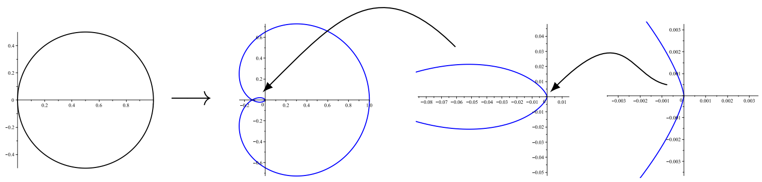
$R = 0,42$



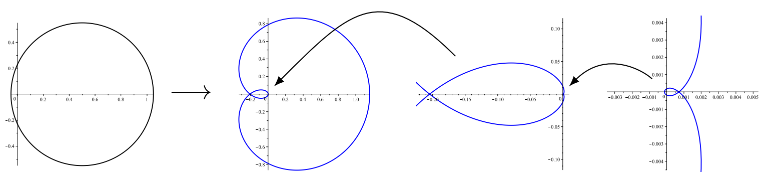
$R = 0,435$



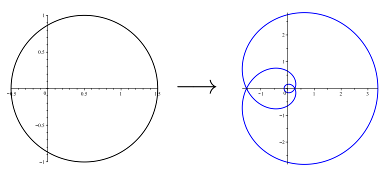
$R = 0,48$



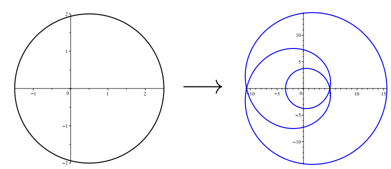
$R = 0,5$ (tout pile)



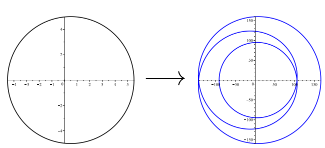
$R = 0,55$



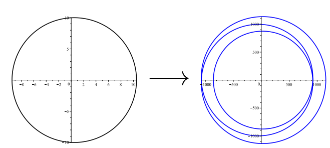
$R = 1$



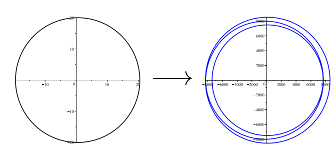
$R = 2$



$R = 5$



$R = 10$



$R = 20$

Proposition (théorème de l'application ouverte)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$, non constante. Alors, f est ouverte.

Preuve. Soit $u \in U$ et m l'ordre de f en u. Puisque f n'est pas constante et puisque U est connexe, m n'est pas nul. Alors, en appliquant le lemme de revêtement, soient V_1 un voisinage ouvert de u et $h \in \mathcal{O}(V_1)$ tels que $h(u) \neq 0$ et

$$\forall z \in V_1,\ f(z) = f(u) + \left[(z-u)h(z)\right]^m.$$

On note alors $p_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^m$ et t la translation $t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + f(u)$. En notant $g : V_1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (z-u)h(z)$, la formule précédente s'écrit encore $f(z) = t \circ p_m \circ g(z)$, pour tout $z \in V_1$. Or, on a vu plus haut que p_m est ouverte et t, qui est holomorphe, bijective et dont la réciproque est $z \mapsto z - f(u)$, est également ouverte. En outre, g est holomorphe et $g'(u) = h(u) \neq 0$. En appliquent le théorème d'inversion locale holomorphe, on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert V de u contenu dans V_1 dont l'image par g est ouverte. Par composition d'applications ouvertes, cela entraîne que $f(V)$ est ouvert. Puisque u est arbitraire dans U, on a montré que f est ouverte. ∎

A noter

En reprenant les conditions et les notations de la première version du lemme de revêtement qui décrit la forme locale d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point d'ordre m *via* la formule (15), si on note k la fonction $k : z \mapsto (z-u)h(z)$ définie au voisinage de u, alors k est holomorphe au voisinage de u et vérifie $k'(u) = h(u) \neq 0$. Ainsi, par le théorème d(inversion locale holomorphe, k est un difféomorphisme analytique local et on peut énoncer le lemme de revêtement sous sa seconde version.

Proposition (lemme de revêtement, seconde version)

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$, non constante. Soit $m \geq 1$ l'ordre de f en u. Alors, il existe un voisinage ouvert V de u contenu dans U et $k \in \mathcal{O}(V)$ telles que :

(i) k est un difféomorphisme analytique $k : V \xrightarrow{\sim} k(V)$

(ii) $\forall z \in V,\ f(z) = f(u) + k(z)^m$.

4.5 Automorphismes du disque et du demi-plan

Définition (automorphisme analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}$)
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un *automorphisme analytique de* U est un difféomorphisme analytique de U sur U.

A noter

(i) Puisque les bijections holomorphes sont automatiquement biholomorphes, un automorphisme analytique de U est une application $U \to U$ holomorphe et bijective.

(ii) Muni de la composition des applications, l'ensemble des automorphismes d'un ouvert U est un groupe (exercice), que l'on note parfois $\mathrm{Aut}(U)$.

Définition (fonction homographique)
Une *fonction homographique* est une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres complexes qui vérifient $ad - bc \neq 0$.

A noter

(i) A vrai dire, sans qu'il ne soit ici question de définir proprement ces notions pourtant simples et fondatrices, une *homographie* est une transformation de la droite projective complexe, que l'on peut voir comme le plan complexe auquel on a ajouté un *point à l'infini*, noté ∞ — en termes topologiques, la droite projective complexe est la sphère de dimension 2. La fonction homographique $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ se trouve alors prolongée à un *application* de la droite projective complexe sur elle-même par les formules $f(\infty) = \frac{a}{c}$ et $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, étant entendu que $\frac{\alpha}{0} = \infty$ dès lors que $\alpha \neq 0$.

[Pour définir proprement la droite projective complexe, définir sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la relation d'équivalence $(x, y) \sim (z, t) \Leftrightarrow xt = yz$. La droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est alors l'ensemble quotient de cette relation d'équivalence, la classe du couple (x, y) étant le plus souvent notée $(x : y)$. Alors, l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto (z : 1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est injective et c'est le complémentaire de l'image dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, savoir $(0 : 1)$, que l'on note ∞. L'application homographique vu ci-dessus s'écrit naturellement $(x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$. Pour aller plus loin, voir n'importe quel cours de géométrie projective.]

(ii) Pourquoi avoir demandé que le déterminant $ad - bc$ soit non nul ? Si $ad - bc = 0$ et si $c \neq 0$, l'application $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est constante sur le connexe $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ puisque elle est holomorphe et puisque sa dérivée, qui vaut $\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, est nulle — retrouver cet fait en calculant la décomposition en éléments simples de la fraction. Enfin, si $ad - bc = 0$ et si $c = 0$, il ne reste plus grand chose : d est nécessairement non nul et la fonction est constante, égale à $\frac{b}{d}$.

Exercice 43
On note $D = D\,(0,1)$.

(i) Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $\forall z_0 \in D,\ \left|\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right| = 1$.

(ii) Soit $z_0 \in D$. Montrer, en utilisant le principe du maximum, que $\forall z \in D,\ \dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z} \in D$.

(iii) Si $z_0 \in D$, on note h_{z_0} l'application homographique $D \to D$ définie par la formule $h_{z_0}(z) = \dfrac{z + z_0}{1 + z\overline{z_0}}$. Montrer que l'ensemble $\{h_{z_0},\ z_0 \in D\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D)$.

[En particulier, la réciproque de h_{z_0} est h_{-z_0}.]

Proposition (automorphismes du disque)
Le groupe des automorphismes analytiques du disque $D\,(0,1)$ *est le groupe des homographies*

$$z \mapsto \lambda \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z_0}}$$

où $z_0 \in D\,(0,1)$ *et* $|\lambda| = 1$.

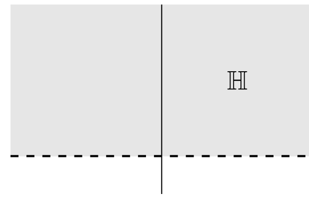
Preuve. On note $D = D\,(0,1)$. L'ensemble de ces homographies forme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D)$; voir l'exercice précédent : c'est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(D)$ engendré par les homographies de l'exercice et les rotations de centre 0. Il s'agit de montrer que ce groupe est le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ tout entier. Soit $f \in \mathrm{Aut}(D)$. On note $z_0 = -f^{-1}(0) \in D$ et g l'homographie de $\mathrm{Aut}(D)$ définie par la formule $g(z) = \frac{z+z_0}{1+z\overline{z_0}}$, qui envoie $f^{-1}(0)$ sur 0. Alors, $f \circ g^{-1}$ est un automorphisme du disque qui fixe 0. Par le lemme de Schwarz, $\left|f \circ g^{-1}(z)\right| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. En raisonnant de même sur la réciproque $g \circ f^{-1}$, on obtient que $\left|f \circ g^{-1}(z)\right| = |z|$ pour tout $z \in D$.

Toujours grâce au lemme de Schwarz, cela implique que $f \circ g^{-1}$ est une rotation $r : z \mapsto \lambda z$, où $|\lambda| = 1$. Ainsi, $f = r \circ g$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Définition (demi-plan de Poincaré[♫])

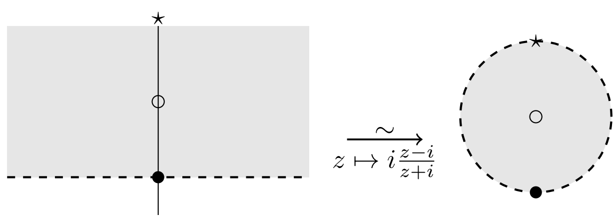
Le *demi-plan de Poincaré* est l'ouvert

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \Im z > 0\}.$$



Proposition (le disque et le demi-plan sont conformément équivalents)
L'homographie $h : z \mapsto i\frac{z-i}{z+i}$ définit un difféomorphisme analytique du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ sur le disque unité $D(0,1)$.

Preuve. On note $D = D(0,1)$. Si $z \in \mathbb{C}$, alors, $|z-i|^2 = |z+i|^2 - 4\Im z$. En particulier, si $z \neq -i$, $|h(z)|^2 = 1 - \frac{4\Im z}{|z+i|^2}$, ce qui montre que $h(\mathbb{H}) \subseteq D$. En outre, h est une bijection $\mathbb{C} \setminus \{-i\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \{i\}$, dont la réciproque s'écrit $h^{-1}(z) = -i\frac{z+i}{z-i}$ — le calcul est immédiat puisque h est une homographie. Si $z \neq i$, alors $\Im h^{-1}(z) = -\Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{1-|z|^2}{|z-i|^2}$, ce qui montre que $h^{-1}(D) \subseteq \mathbb{H}$, ou encore que $D \subseteq h(\mathbb{H})$. Ainsi, $h(\mathbb{H}) = D$, ce qu'il fallait démontrer puisque les homographies sont holomorphes. ■



A noter
On aurait pu choisir bien d'autres homographies. L'homographie h de l'énoncé est la seule qui envoie 0 sur $-i$, i sur 0 et ∞ sur i.

Exercice 44
Trouver toutes les homographies qui définissent des difféomorphismes analytiques de $\mathbb{H}$ sur $D(0,1)$.

Exercice 45
Montrer que tout difféomorphisme analytique de $\mathbb{H}$ sur $D(0,1)$ est homographique — autrement dit, que c'est la restriction à $\mathbb{H}$ d'une homographie.

Proposition (automorphismes du demi-plan)
Les automorphismes analytiques du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ sont les homographies

$$z \mapsto \frac{az+c}{bz+d}$$

où $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Preuve. D'abord, si $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et si $z \in \mathbb{H}$,

$$\Im\left(\frac{az+c}{bz+d}\right) = \frac{\Im(az+c)(b\overline{z}+d)}{|bz+d|^2} = \frac{\Im(adz+bc\overline{z})}{|bz+d|^2} = \frac{\Im(z)}{|bz+d|^2}$$

[♫]Henri Poincaré, 1854–1912

la dernière égalité venant du fait que $ad-bc=1$. Cela montre que l'homographie associée à $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, dont la réciproque est associée à la matrice inverse $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, est un automorphisme de $\mathbb{H}$. Par ailleurs, en notant $D=D(0,1)$ et h l'homographie de la proposition précédente, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}\,(D) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,(\mathbb{H}) \\ \alpha & \longmapsto & h^{-1}\circ\alpha\circ h \end{array}$$

est une bijection de $\mathrm{Aut}\,(D)$ sur $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{H})$ — c'est un isomorphisme de groupes. [En particulier, tout automorphisme de $\mathbb{H}$ est une homographie, puisque c'est une composée d'homographies.] Si $\alpha\,(\lambda,z_0)$ désigne l'automorphisme de D générique $\alpha\,(\lambda,z_0) : z\mapsto\lambda\frac{z+z_0}{1+z\overline{z_0}}$, où $|\lambda|=1$ et $|z_0|<1$, l'automorphisme $\alpha\,(\lambda,z_0)$ est la composée de l'automorphisme $\alpha\,(1,z_0)$ et de la rotation $\alpha\,(\lambda,0)$. Il suffit donc de montrer que $h^{-1}\circ\alpha\,(1,z_0)\circ h$ et $h^{-1}\circ\alpha\,(\lambda,0)\circ h$ sont des homographies associées à des matrices du groupe $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R})$ pour conclure. On calcule naïvement : en notant d'une part x_0 et y_0 les parties réelle et imaginaire de $z_0\in D\,(0,1)$,

$$h^{-1}\circ\alpha\,(1,z_0)\circ h(z)=\frac{(1+y_0)\,z+x_0}{x_0z+(1-y_0)}=\frac{\frac{1+y_0}{\sqrt{1-|z_0|^2}}z+\frac{x_0}{\sqrt{1-|z_0|^2}}}{\frac{x_0}{\sqrt{1-|z_0|^2}}z+\frac{1-y_0}{\sqrt{1-|z_0|^2}}}$$

et, d'autre part, si $\lambda=e^{2i\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$,

$$h^{-1}\circ\alpha\,(\lambda,0)\circ h(z)=\frac{i(1+\lambda)z+\lambda-1}{(1-\lambda)z+i(1+\lambda)}=\frac{z\cos\theta-\sin\theta}{z\sin\theta+\cos\theta}.$$

Ainsi, $h^{-1}\circ\alpha\,(1,z_0)\circ h$ est associé à la matrice $\frac{1}{\sqrt{1-|z_0|^2}}\begin{pmatrix} 1+y_0 & x_0 \\ x_0 & 1-y_0 \end{pmatrix}\in\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R})$ et $h^{-1}\circ\alpha\,(\lambda,0)\circ h$ est associé à la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\in\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R})$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

5 Séries de Laurent, formule des résidus

5.1 Séries de Laurent, fonctions analytiques dans une couronne

Définition (série de Laurent)
Une *série de Laurent*[♫] est une série de fonctions de la variable complexe z de la forme $\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$.

Définition (convergence d'une série de Laurent)
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$, on dit que *la série de Laurent* $\sum_n a_n z^n$ *converge* lorsque les deux séries

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} a_{-n}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

convergent. Dans ces conditions, on note

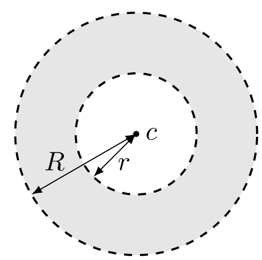
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 1} a_{-n} z^{-n}.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série *diverge*. Dans cette définition, le mot *converge* peut être pris dans n'importe quel sens usuel relatif à la convergence des séries de fonctions : simple ou absolue en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, uniforme ou normale sur une partie de $\mathbb{C}$, etc.

Définition (couronne)

Soient $r \geq 0$, $R \in]0,+\infty]$ et $c \in \mathbb{C}$. La *couronne ouverte* (ou *couronne* tout court) de centre c et de rayons r et R est

$$\mathrm{Cour}\,(c,r,R) = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z-c| < R\}\,.$$



A noter
(i) Si $r \geq R$, la couronne $\mathrm{Cour}\,(c,r,R)$ est vide (!).

(ii) La couronne $\mathrm{Cour}\,(c,0,R)$ est le disque épointé $D\,(c,R)\setminus\{c\}$.

(iii) La couronne $\mathrm{Cour}\,(0,0,+\infty)$ égale $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(iv) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série de Laurent. Elle converge simplement en un point $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si, et seulement si la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge en z_0 et la série entière $\sum_n a_{-n} z^n$ converge en $\frac{1}{z_0}$.
On note $\rho' \in [0,+\infty]$ le rayon de la série entière $\sum_n a_n z^n$ et $\rho'' \in [0,+\infty]$ le rayon de la série entière $\sum_n a_{-n} z^n$. Alors, la convergence des ces deux séries entières est normale sur tout compact contenu dans la couronne ouverte $\left\{z\in\mathbb{C},\ \frac{1}{\rho''} < |z| < \rho'\right\}$, avec les conventions usuelles sur les rayons : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$. Par conséquent,

$$\textit{la fonction } z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \textit{ est holomorphe dans la couronne ouverte } \left\{z\in\mathbb{C},\ \tfrac{1}{\rho''} < |z| < \rho'\right\}.$$

Exemples
(i) Les fonctions $\frac{e^z}{z^n}$ où $n \geq 0$, $\exp\frac{1}{z}$, $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ sont définies par des séries de Laurent sur $\mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathrm{Cour}\,(0,0,+\infty)$.

(ii) Pour tout $z \in \mathrm{Cour}\,(0,1,+\infty)$, $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{-n}$

Exercice 46 Soit $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(i) Si $|z| < |w|$, alors $\dfrac{1}{w-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$.

[♫] Pierre Laurent, 1813–1854

(ii) Si $|z| > |w|$, alors $\dfrac{1}{w-z} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$.

Théorème (les fonctions holomorphes dans les couronnes sont les séries de Laurent)
Soient R', R'' tels que $0 \leq R' < R'' \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe dans la couronne $\mathrm{Cour}\,(0, R', R'')$. *Alors,*

(i) il existe une unique série de Laurent $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ dont la somme soit égale à f sur $\mathrm{Cour}\,(0, R', R'')$ *:*

$$\forall z \in \mathrm{Cour}\,(0, R', R''),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n\ ;$$

(ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} \tag{18}$$

où r est n'importe quel réel vérifiant $R' < r < R''$.

Preuve. On note $C = \mathrm{Cour}\,(0, R', R'')$.
Unicité On suppose que f est la somme d'une série de Laurent sur C : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall z \in C,\ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

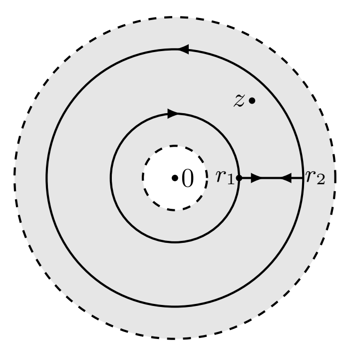
En particulier, la série entière $\sum_n a_n z^n$ a un rayon supérieur ou égal à R'' et la série entière $\sum_n a_{-n} z^n$ a un rayon supérieur ou égal à $1/R'$. Soient $r \in \,]R', R''[$ et $N \in \mathbb{Z}$. Les séries de fonctions

$$\frac{1}{z^{N+1}} \sum_n a_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{z^{N+1}} \sum_n a_{-n} z^{-n}$$

convergent normalement sur le cercle de centre 0 et de rayon r, si bien qu'on peut intervertir somme et intégrale (curviligne) dans l'égalité

$$\int_{C(0,r)} \frac{f(z)dz}{z^{N+1}} = \int_{C(0,r)} \frac{1}{z^{N+1}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right) dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z^{N-n+1}} = 2i\pi a_N.$$

Cela montre à la fois l'unicité et le (ii).
Existence Soit $z \in C$. Soient r_1 et r_2 deux réels tels que $R' < r_1 < |z| < r_2 < R''$.



On note γ le concaténé dans cet ordre des lacets $C^{-1}(0, r_1)$, $S(r_1, r_2)$, $C(0, r_2)$ et $S(r_2, r_1)$, où $C^{-1}(0, r_1)$ désigne le lacet inverse du lacet $C(0, r_1)$ — c'est le cercle de centre 0 et de rayon r_1 parcouru une fois dans le sens indirect à partir du point r_1. L'indice de z par rapport à γ est 1 et γ est homotope à zéro dans C, si bien que $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, selon la formule de Cauchy. Or, la somme des intégrales le long des deux segments est nulle ; en outre, l'intégrale le long de $C^{-1}(0, r_1)$ est l'opposée de l'intégrale le long de $C(0, r_1)$. Cela montre que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En utilisant les développements de l'exercice précédent, on obtient les convergences normales sur les cercles de centre 0 et de rayons respectifs r_2 et r_1 des séries

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

ce qui légitime l'interversion des sommes et des intégrales dans l'égalité

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)} f(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right)d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)} f(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}\right)d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{n+1}}\right)z^{-n}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque la fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ est holomorphe dans la couronne ouverte C, le théorème d'homotopie montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'intégrale $\oint_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{n+1}}$ ne dépend pas de r pourvu que $R' < r < R''$. Ainsi, en notant $a_n = \oint_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^{n+1}}$ pour n'importe lequel de ces r, on a montré que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

A noter

(i) L'indépendance de la formule (18) en le nombre r, redémontrée dans la partie *unicité* de la preuve ci-dessus, est une conséquence du théorème d'homotopie puisque tous les lacets $C(0,r)$, $r \in\,]R', R''[$, sont (évidemment) homotopes dans la couronne ouverte $\mathrm{Cour}\,(0, R', R'')$. On utilise également cela dans la partie *existence* de ladite preuve.

(ii) Le théorème montre en particulier que deux séries de Laurent qui définissent une même fonction au voisinage épointé d'un point ont les mêmes coefficients.

Corollaire (décomposition d'une fonction holomorphe dans une couronne)

Soient R', R'' deux réels tels que $0 \leq R' < R'' \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe dans la couronne $\mathrm{Cour}\,(0, R', R'')$*. Alors, il existe $f_1 \in \mathcal{O}\left(D\left(0, R''\right)\right)$ et $f_2 \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C} \setminus \overline{D}\left(0, R'\right)\right)$, uniques, telles que*

(i) $\forall z \in \mathrm{Cour}\,(0, R', R'')\,,\ f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ *;*

(ii) $\lim_{|z|\to\infty} f_2(z) = 0.$

Preuve. L'existence de f_1 et f_2 est garantie par le théorème précédent, en prenant

$$\forall z \in D\left(0, R''\right),\ \forall r \in]0, |z|[,\ f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}\left(0, R'\right),\ \forall r \in]|z|, +\infty[,\ f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

En particulier, la condition sur la limite de $f_2(z)$ lorsque $|z|$ tend vers 0 est assurée par la forme intégrale de f_2 puisque l'intervalle d'intégration est compact — ce qui légitime l'interversion de l'intégrale et de la limite. Pour l'unicité, il suffit d'étudier le cas où f est la fonction nulle sur la couronne ouverte. On suppose ainsi que f_1 est holomorphe dans le disque ouvert $D\left(0, R''\right)$, que f_2 est holomorphe dans la couronne ouverte $\{z,\ |z| > R'\}$, que $f_2(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini, et que $f_1(z) = f_2(z)$, pour tout z vérifiant $R' < |z| < R''$. Alors, la fonction g définie par f_1 sur $\{z,\ |z| < R''\}$ et par f_2 sur $\{z,\ |z| > R'\}$ est entière et tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini. Elle est donc bornée, ce qui entraîne, par le théorème de Liouville, que g est la fonction nulle. Donc les fonctions f_1 et f_2 sont nulles, ce qu'il fallait démontrer. ■

Exercice 47

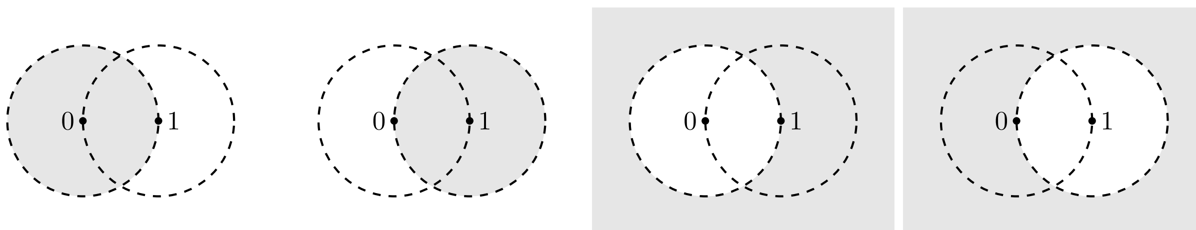
Pour tout $z \notin \{0, 1\}$, $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z}$. Montrer qu'on peut développer cette fonction sur les couronnes suivantes.

(i) $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour tout $z \in \mathrm{Cour}\,(0, 0, 1)$, *i.e.* pour $0 < |z| < 1$

(ii) $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{-1}{z-1} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ pour tout $z \in \mathrm{Cour}\,(1,0,1)$, *i.e.* pour $0 < |z-1| < 1$

(iii) $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{-1}{z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ pour tout $z \in \mathrm{Cour}\,(0,1,\infty)$, *i.e.* pour $|z| > 1$

(iv) $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{-1}{(z-1)^2\left(1+\frac{1}{z-1}\right)} = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^n}$ pour tout $z \in \mathrm{Cour}\,(1,1,\infty)$, *i.e.* pour $|z-1| > 1$



Définition (DSL)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u \in U$. On dit qu'une application $f : U \setminus \{u\}$ est *développable en série de Laurent (DLS) en* u lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $D\,(u,r) \setminus \{u\} \subseteq U$ et une série de Laurent $\sum_n a_n z^n$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z-u| < r \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-u)^n. \tag{19}$$

A noter
(i) Le théorème précédent assure que, lorsqu'une fonction f est DSL en u, il existe une unique série de Laurent qui vérifie les conditions de la définition. On dit que la relation (19) est *le développement en série de Laurent de* f *en* u.

(ii) Lorsqu'une fonction f est holomorphe sur un disque épointé $D\,(u,r) \setminus \{u\} = \mathrm{Cour}\,(u,0,r)$ où $r > 0$, elle est développable en série de Laurent en u. En outre, si son développement en série de Laurent est

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-u)^n,$$

le rayon de la série entière $\sum_n a_{-n} z^n$ est infini.

Définition (résidu d'une fonction DSL)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f : U \setminus \{u\} \to \mathbb{C}$ une fonction DSL en u. Avec les notations de la définition précédente, on appelle le nombre complexe a_{-1} le *résidu de* f *en* u. On le notera $\mathrm{Res}\,(f,u)$.

A noter
Dans les conditions de la définition précédente, le résidu de f en u est écrit en rouge dans le DSL de f en u :

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-3}}{(z-u)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-u)^2} + \frac{a_{-1}}{z-u} + a_0 + a_1(z-u) + a_2(z-u)^2 + \dots$$

Exercice 48
Si une fonction f est holomorphe dans un ouvert épointé $U \setminus \{u\}$, le résidu de f en u s'écrit sous forme intégrale

$$\mathrm{Res}\,(f,u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(u,r)} f(z)dz$$

pour tout réel strictement positif r suffisamment petit [pour que $\overline{D}\,(u,r)$ soit contenu dans U]
.

5.2 Points singuliers, fonctions méromorphes

Définition (point singulier, point régulier)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de complexes indexée par $\mathbb{Z}$ telle que le développement en série de Laurent de f en u soit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-u)^n.$$

On dit que *u est un point singulier pour f* lorsqu'au moins un des a_n, $n \leq -1$, est non nul. Dans le cas contraire, on dit que *u est un point régulier pour f*.

A noter

(i) Dans la situation de la définition, si u est un point régulier pour f, alors f se prolonge de manière unique, par continuité, en une fonction holomorphe sur U.

(ii) Certains auteurs parlent de *singularité* plutôt que de point singulier. Le choix fait ici consiste à réserver le nom de singularité à la situation — bien différente – suivante : un point s du cercle de convergence d'une série entière en est une *singularité* lorsque la fonction définie par la série entière sur son disque ouvert de convergence ne se prolonge analytiquement sur aucun disque ouvert non vide centré en s.

Exemples
L'origine est un point singulier pour la fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ et pour la fonction $z \mapsto \frac{e^z-1}{z^2}$, alors que c'est un point régulier pour les fonctions $z \mapsto \frac{e^z-1}{z}$ et $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ si on prolonge ces dernières par 1 en 0.

Définition (pôle, point singulier essentiel)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$ telle que le développement en série de Laurent de f en u soit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-u)^n.$$

Lorsque $\{n \leq -1,\ a_n \neq 0\}$ est fini et non vide, on dit que *u est un pôle de f*, ou encore que *f présente un pôle en u*. Lorsqu'au contraire $\{n \leq -1,\ a_n \neq 0\}$ est infini, on dit que *u est un point singulier essentiel de f*, ou encore que *f présente un point singulier essentiel en u*.

A noter
Il résulte immédiatement de cette définition qu'un point singulier d'une fonction holomorphe sur un ouvert épointé est ou bien un pôle, ou bien un point singulier essentiel.

Exemples

(i) La fonction $c = z \mapsto \cos\frac{1}{z^2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}$ présente un point singulier essentiel en 0, et un résidu nul.

(ii) La fonction $z \mapsto \dfrac{\cos z^2}{(z^2-\pi^2)^4}$ presente un pôle en π et un autre en $-\pi$ — exercice : écrire les DSL en π et en $-\pi$ de cette fonction paire.

Proposition (caractérisation du résidu en terme de primitives)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. On suppose que u est un point singulier de f. Alors, $\mathrm{Res}\,(f,u)$ *est l'unique nombre complexe tel que la fonction*

$$z \mapsto f(z) - \frac{\mathrm{Res}\,(f,u)}{z-u}$$

ait une primitive sur un disque épointé $D(u,r) \setminus \{u\}$ où $r > 0$.

Preuve. On développe f en série de Laurent sur un disque épointé $D(u,r) \setminus \{u\}$ où $r > 0$: soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall z \in D(u,r) \setminus \{u\},\ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-u)^n.$$

Si a est n'importe quel nombre complexe, la fonction $z \mapsto \frac{a - \mathrm{Res}(f,u)}{z-u}$ admet une primitive sur $D(u,r) \setminus \{u\}$ si, et seulement si $a = \mathrm{Res}(f,u)$. Comme la fonction

$$z \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n (z-u)^n$$

admet

$$z \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} \frac{a_n}{n+1} (z-u)^{n+1}$$

pour primitive sur $D(u,r) \setminus \{u\}$, le résultat en découle aussitôt. ■

5.2.1 Points réguliers

Proposition (théorème du faux point singulier)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. Alors, u est un point régulier de f si, et seulement si f est bornée au voisinage épointé de u.

A noter
Dire que f est *bornée au voisinage épointé de u* signifie qu'il existe $r > 0$ tel que $|f|$ est borné sur $D(u,r) \setminus \{u\}$.

Preuve. Il s'agit de montrer que f est bornée au voisinage épointé de u si, et seulement si f se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier. Si f se prolonge ainsi, ce prolongement est continu sur un disque fermé de centre u et de rayon non nul, donc borné au voisinage de u. Réciproquement, on suppose que $r > 0$ est tel que $|f|$ soit une fonction bornée sur $D(u,r) \setminus \{u\}$. On définit la fonction $g : D(u,r) \to \mathbb{C}$ par $g(u) = 0$ et $g(z) = (z-u)^2 f(z)$ pour tout $z \in D(u,r) \setminus \{u\}$. Puisque f est bornée sur $D(u,r) \setminus \{u\}$, la limite de $\frac{g(z)}{z-u}$ lorsque z tend vers u dans $D(u,r) \setminus \{u\}$ est nulle, ce qui implique que g est dérivable au sens complexe en u et que $g'(u) = 0$. Par ailleurs, g est évidemment holomorphe sur $D(u,r) \setminus \{u\}$, si bien que $g \in \mathcal{O}(D(u,r))$. On écrit le développement en série entière de g en u : soit $\rho > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a_1 = 0$ et

$$\forall z \in D(u,\rho),\ g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-u)^n.$$

Alors,

$$\forall z \in D(u,\rho),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-u)^n,$$

ce qui prouve que f est DSE en u. ■

5.2.2 Pôles, fonctions méromorphes

Proposition (caractérisation des pôles)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. On suppose que u est un pôle de f. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) f présente un pôle en u
(ii) Il existe un entier naturel (non nul) m et des nombres complexes $r_1, \ldots, r_m$ tels que la fonction

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{r_k}{(z-u)^k}$$

soit bornée au voisinage de u
(iii) Il existe un entier naturel (non nul) m tel que $z \mapsto (z-u)^m f(z)$ soit bornée au voisinage de u
(iv) Il existe un entier naturel (non nul) m et $g \in \mathcal{O}(U)$ telles que

$$\forall z \in U \setminus \{u\},\ f(z) = \frac{g(z)}{(z-u)^m}.$$

Preuve. (i)→(ii) Ecrire le DSL de f en u et soustraire la série des puissances négatives de $z-u$ — qui est un polynôme en $\frac{1}{z-u}$. (ii)→(iii) $(z-u)^m f(z)$ est la somme d'une fonction polynomiale et d'une fonction bornée au voisinage de u. (iii)→(iv) Appliquer le théorème du faux point singulier à $z \mapsto (z-u)^m f(z)$. (iv)→(i) Ecrire le DSL de f en u à partir du DSE de g en u. ■

Définition (ordre d'un pôle)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. On suppose que u est un pôle de f. Le degré m de la partie négative du DSL de f en u — qui est une fonction polynomiale en $\frac{1}{z-u}$ — est l'*ordre du pôle u de f*. On dit aussi que f *présente un pôle d'ordre m en u*. Un pôle d'ordre 1 est dit *simple*, un pôle d'ordre 2 est dit *double*, etc.

A noter
Dans les conditions de la définition, f présente un pôle d'ordre m en u si, et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.

(i) Le DSL de f en u s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-u)^n$$

avec $a_{-m} \neq 0$.

(ii) L'application $g : z \mapsto (z-u)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur U qui vérifie $g(u) \neq 0$.

Définition (partie principale d'une fonction en un de ses pôles)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. On suppose que u est un pôle d'ordre m de f et que le DSL de f en u est

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-u)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-u)^n.$$

La *partie principale* de f en u est la fonction rationnelle

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-u)^n}.$$

A noter
Si F est la partie principale de f en un pôle u, alors $|F(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers u.

Définition (fonction méromorphe)
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite *méromorphe sur U* s'il existe $g, h \in \mathcal{O}(U)$ telles que

(i) h n'est pas la fonction nulle sur U ;

(ii) si $\mathcal{Z}(h)$ désigne l'ensemble des zéros de h, alors

$$\forall z \in U \setminus \mathcal{Z}(h),\ f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

A noter
(i) L'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non nulle sur un ouvert connexe U étant discret, toute fonction méromorphe est holomorphe hors d'une partie discrète (l'ensemble des zéros de son dénominateur), en chaque point de laquelle elle présente un point régulier ou un pôle.

(ii) A vrai dire, *si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et si Z est une partie discrète de U, toute fonction holomorphe sur $U \setminus Z$ qui présente un pôle en tout point de Z est méromorphe sur U*. C'est un théorème de Weierstrass♫, pas si simple, dont on n'apporte pas ici de preuve.
[Cela revient essentiellement à trouver une fonction holomorphe sur un ouvert connexe dont l'ensemble — discret — des zéros est prescrit.]

(iii) Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U est un corps pour l'addition et la multiplication usuelles. C'est le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}(U)$, qui est intègre grâce au théorème de prolongement analytique.

♫Karl Weierstraß, 1815–1897.

Proposition (calcul du résidu en un pôle simple)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions méromorphes sur U, non nulles.
(i) Si $u \in U$ est un pôle simple de f, alors

$$\mathrm{Res}\,(f,u) = \lim_{z\to u}(z-u)f(z).$$

(ii) Si $u \in U$ est un pôle simple de la fonction méromorphe $\frac{f}{g}$ avec $f(u) \neq 0$, alors $g'(u) \neq 0$ et

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, u\right) = \frac{f(u)}{g'(u)}.$$

Preuve. (i) Développer f en série de Laurent au voisinage épointé de u, multiplier par $z-u$, puis passer à la limite en u. (ii) Puisque $g(u)=0$, le quotient $\frac{(z-u)f(z)}{g(z)} = \frac{(z-u)f(z)}{g(z)-g(u)}$ tend vers $\frac{f(u)}{g'(u)}$ lorsque z tend vers u. ■

Exemple $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{1}{2ie}$.

Exercice 49
Dans les conditions de la proposition précédente, si $u \in U$ est un pôle d'ordre m de f, alors

$$\mathrm{Res}\,(f,u) = \frac{h^{(m-1)}(u)}{(m-1)!}$$

où h est la fonction $z \mapsto (z-u)^m f(z)$.

Exemple d'application
Pour calculer le résidu de $z \mapsto \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ en i, calculer le début du DSE de $z \mapsto \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$ en i, en extraire le coefficient de $z-i$, c'est le résidu cherché. À vrai dire, il suffit de calculer le développement limité à l'ordre 1 en i de la fonction $\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$. On trouve $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i\right) = \frac{-i}{2e}$.

Définition (valuation en un point d'une fonction méromorphe)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe sur U et $u \in U$. La *valuation de f en u* est le nombre entier — que l'on notera $v_u(f)$ — défini par :
(i) $v_u(f) = 0$ si f est holomorphe en u et si $f(u) \neq 0$;
(ii) $v_u(f) = n$ si f est holomorphe en u a un zéro d'ordre n en u ;
(iii) $v_u(f) = -n$ si f présente un pôle d'ordre n en u.
Autrement dit, $v_u(f)$ est l'unique entier relatif tel que, dans un voisinage épointé $V \setminus \{u\}$ de u, f s'écrive sous la forme

$$f(z) = (z-u)^{v_u(f)}g(z)$$

où g est holomorphe sur V et vérifie $g(u) \neq 0$.

5.2.3 Points singuliers essentiels

Une notion de topologie générale : une partie A de $\mathbb{C}$ est dense — ou encore *partout dense* — lorsque son adhérence $\overline{A}$ pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ tout entier.

Exercice 50 (de topologie)
Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) A est dense dans $\mathbb{C}$
(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $|z-a| \leq \varepsilon$
(iii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $z = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 51
Les sous-ensembles $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $\mathbb{C} \setminus \{-1,0,1\}$, $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \setminus \partial\overline{D}\,(2+i,3)$ sont denses dans $\mathbb{C}$.

Théorème (densité de l'image autour d'un point singulier essentiel)
Soient $u \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D(u,r) \setminus \{u\}$. On suppose que u est un point singulier essentiel de f. Alors, $f(D(u,r) \setminus \{u\})$ est une partie dense de $\mathbb{C}$.

PREUVE. On suppose que $f(D(u,r) \setminus \{u\})$ n'est pas dense. Soient alors $z \in \mathbb{C}$ et $\eta > 0$ tels que $\forall \zeta \in D(u,r) \setminus \{u\}$, $|f(\zeta) - z| \geq \eta$. Alors, la fonction $g : \zeta \in D(u,r) \setminus \{u\} \mapsto \frac{1}{f(\zeta)-z}$ est holomorphe, et $|g(\zeta)| \leq \frac{1}{\eta}$, pour tout $\zeta \in D(u,r) \setminus \{u\}$. Ainsi, g et bornée sur $D(u,r) \setminus \{u\}$, ce qui entraîne que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(u,r)$. Alors, $f = z + \frac{1}{g}$ est méromorphe sur $D(u,r)$: en u, elle est régulière ou a un pôle, ce qu'il fallait démontrer. ■

A noter

(i) Ce théorème est dû à Weierstrass, encore lui.

(ii) En particulier, si u est un point singulier essentiel de f, alors $|f(z)|$ n'a aucune limite lorsque z tend vers u.

(iii) A vrai dire, l'important *grand théorème de Picard*[♫] en dit bien davantage : *l'image d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point singulier essentiel est soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}$ privé d'un unique point ; en outre, les fibres non vides sont infinies.* On ne démontre pas ce théorème ici. Se contenter de se faire les dents en calculant l'image de n'importe quelle couronne $\mathrm{Cour}(0,0,R)$, $R > 0$ par la fonction $z \mapsto \exp \frac{1}{z}$.

5.3 Le théorème des résidus

Théorème (théorème des résidus, dit aussi *formule des résidus*)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}$ une partie finie de U. Soient aussi f une fonction holomorphe sur $U \setminus \mathcal{P}$ et γ un lacet de U, homotope à zéro dans U, dont le support ne rencontre pas $\mathcal{P}$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}\,(f,p) \times \mathrm{Ind}_\gamma(p).$$

PREUVE. Pour chaque $p \in \mathcal{P}$, on écrit le développement en série de Laurent de f en p :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{p,n}(z-p)^n$$

et on note

$$\varphi_p : z \mapsto \sum_{n \leq -1} a_{p,n}(z-p)^n,$$

qui est encore holomorphe sur $U \setminus \mathcal{P}$. En outre, la fonction

$$f - \sum_{p \in \mathcal{P}} \varphi_p$$

se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur U tout entier, puisque son DSL en chaque point de $\mathcal{P}$ est un DSE. Comme le lacet γ est homotope à zéro dans U, cela entraîne que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} \int_\gamma \varphi_p(z)dz$$

Puisque les fonctions $z \mapsto \frac{a_{p,-k}}{(z-p)^k}$ admettent des primitives sur $U \setminus \mathcal{P}$ lorsque $k \neq 1$ et puisque les convergences des séries de Laurent sont normales sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$, garantissant l'interversion des sommes et des intégrales — le support de γ est compact —, on obtient que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} \int_\gamma \frac{\mathrm{Res}\,(f,p)}{z-p} dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}\,(f,p) \times 2i\pi\, \mathrm{Ind}_\gamma(p),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

[♫] Emile Picard, 1856–1941

Corollaire (résidu et changement de variable)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ telle que $\varphi'(u) \neq 0$. Soit f une fonction holomorphe sur $\varphi(U) \setminus \{\varphi(u)\}$. Alors, $f \circ \varphi$ est DSL en u et

$$\operatorname{Res}(f \circ \varphi \times \varphi', u) = \operatorname{Res}(f, \varphi(u)).$$

Preuve. Quitte à restreindre U, grâce au caractère local du résidu qui ne dépend que du DSL, le théorème d'inversion locale holomorphe permet de supposer que U est connexe et que φ est un difféomorphisme holomorphe $U \to \varphi(U)$. On note $v = \varphi(u)$ et V l'ouvert connexe $V = \varphi(U)$. Soit $r > 0$ tel que $D(u,r) \subseteq U$. On note γ le lacet $\gamma = C(u,r)$. Alors, par changement de variable,

$$\int_\gamma f \circ \varphi(z) \times \varphi'(z) dz = \int_{\varphi\circ\gamma} f(z) dz. \tag{20}$$

En particulier, en divisant par $2i\pi$, le théorème des résidus permet de ré-écrire cette formule en

$$\operatorname{Res}(f \circ \varphi \times \varphi', u) = \operatorname{Res}(f, v) \times \operatorname{Ind}_{\varphi\circ\gamma}(v).$$

Il suffit donc, pour conclure, de montrer que l'indice en v du lacet $\varphi \circ \gamma$ est 1. On applique la formule (20) à la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-v}$. Cela fournit la relation

$$\operatorname{Ind}_{\varphi\circ\gamma}(v) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varphi\circ\gamma} \frac{dz}{z-v} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) - v} dz.$$

Or, puisque φ est un difféomorphisme holomorphe, u est un zéro simple de v, si bien que la fonction méromorphe $\frac{\varphi'}{\varphi - v}$ présente un pôle simple en u, dont le résidu est $\frac{\varphi'(u)}{\varphi'(u)} = 1$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple
Si $w \neq 0$, alors $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{wz}}{e^{wz}-1}, 0\right) = \frac{1}{w}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-1}, 1\right) = \frac{1}{w}$.

On conclut cette section par trois énoncés relatifs au calcul du nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe.

Proposition (intégrale curviligne de la dérivée logarithmique)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U et γ un lacet de U homotope à zéro. On suppose que l'ensemble $\mathcal{P}$ des zéros et des pôles de f dans U est fini. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p \in P} v_p(f) \times \operatorname{Ind}_\gamma(p).$$

Preuve. Grâce à la formule des résidus, il suffit de calculer le résidu de f'/f en un point quelconque $p \in \mathcal{P}$ puisque f'/f est méromorphe sur U et a tous ses pôles dans $\mathcal{P}$. Comme $f(z) = (z-p)^{v_p(f)} g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de p et ne s'annule pas en p, la dérivée logarithmique f'/f s'écrit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v_p(f)}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

au voisinage épointé de p. Comme g'/g est holomorphe au voisinage de p cela montre que $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = v_p(f)$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Corollaire (nombres de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U et γ un lacet de U homotope à zéro. On suppose que l'ensemble $\mathcal{P}$ des zéros et des pôles de f dans U est fini et que l'indice de γ par rapport à tout point de $\mathcal{P}$ égale 1. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(f).$$

PREUVE. C'est une application immédiate de la proposition précédente. ■

A noter
Dans l'énoncé précédent, la somme $\sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(f)$ s'interprète comme le nombre de zéros de f comptés avec leurs multiplicités à laquelle on retranche nombre de pôles de f comptés avec leurs ordres.

Théorème (de Rouché♫)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que $\overline{D}\left(u, r\right) \subseteq U$ et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z-u| = r \Longrightarrow |f(z) - g(z)| < |g(z)|\,.$$

Alors, f et g ont le même nombre de zéros dans $D\left(u, r\right)$, comptés avec leurs multiplicités.

PREUVE. L'hypothèse implique que ni f ni g ne s'annulent sur le cercle $\partial\overline{D}\left(u, r\right)$. En outre, puisque $\overline{D}\left(u, r\right)$ est compact, le nombre de zéros de f dans $D\left(u, r\right)$ est fini, et *idem* pour g. Ainsi, le quotient $h = \frac{f}{g}$ est holomorphe dans une couronne $C = \mathrm{Cour}\left(u, r_1, r_2\right) \subseteq U$ où $r_1 < r < r_2$. Quitte à rapprocher r_1 et r_2 de r, on peut supposer que l'inégalité $|h(z) - 1| < 1$ est valide sur la couronne C. Ainsi, h envoie C dans le disque ouvert $D\left(1, 1\right)$ qui est inclus dans le plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Alors, la fonction $\mathrm{Log} \circ h$ est holomorphe sur $\mathrm{Cour}\left(u, r_1, r_2\right)$ et a pour dérivée le quotient h'/h. En particulier,

$$\int_{C(u,r)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0.$$

On conclut en remarquant que $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ et en appliquant le corollaire sur le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe — noter que ni f ni g n'ont de pôles dans U. ■

A noter
(i) Si $\mathcal{Z}(f)$ désigne l'ensemble des zéros de f, la conclusion du théorème de Rouché signifie précisément que

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}(f)} v_z(f) = \sum_{z\in\mathcal{Z}(g)} v_z(g).$$

(ii) Le théorème de Rouché se généralise en remplaçant le disque $\overline{D}\left(u, r\right)$ par un compact dont le bord est le support d'un arc simple — la preuve ci-dessus s'adapte sans histoire à cette situation plus large.

Exemple classique d'application : le théorème de d'Alembert-Gauss♫
Soit P un polynôme à coefficients complexes, unitaire, non constant, de degré d. Alors, la limite de $\frac{P(z)}{z^d}$ est 1 lorsque $|z|$ tend vers l'infini. Ainsi, il existe $R > 0$ tel que $\left|P(z) - z^d\right| < \left|z^d\right|$ pour tout z dans le cercle de centre 0 et de rayon R. Le théorème de Rouché assure alors que P a autant de zéro dans $D\left(0, R\right)$ que z^d, à savoir d, en comptant les multiplicités. En particulier, P a au moins un zéro dans $D\left(0, R\right)$, ce qui prouve le théorème de d'Alembert-Gauss : le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

5.4 Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Les applications de la formule des résidus au calcul d'intégrales sont innombrables. On n'en présente ici qu'un tout petit aperçu.

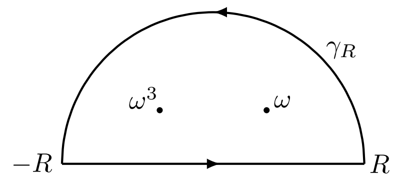
Exemple 1
On montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Bien sûr, on peut calculer une primitive de $\frac{1}{1+t^4}$ en décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples et se ramener ainsi à un calcul de limite. La formule des résidus fournit un autre mode de calcul, bien moins fastidieux, comme suit.

♫Eugène Rouché, 1832–1910.
♫Karl Friedrich Gauß, 1777–1855

Puisque l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ est la limite de $\int_{-R}^{R} \frac{dt}{1+t^4}$ lorsque R tend vers $+\infty$, on considère le lacet γ_R formé de la concaténation du demi-cercle de centre 0 et de rayon $R > 1$, d'origine R et d'extrémité $-R$, suivi du segment $S(-R, R)$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^4}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet les deux pôles ω et ω^3 dans le demi-disque dont le support de γ_R est le bord, où $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En outre, l'indice de γ_R par rapport à ces deux pôles vaut 1.



La formule des résidus assure alors que, pour tout $R > 1$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega^3\right).$$

D'une part,

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{\delta_R} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{-R}^{R} \frac{dt}{1+t^4}$$

où δ_R est le lacet $[0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$. Comme $\left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq \frac{1}{|z|^4-1} = \frac{1}{R^4-1}$, l'intégrale le long de δ_R vérifie, par majoration standard,

$$\left|\int_{\delta_R} \frac{dz}{1+z^4}\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

si bien que, pour tout $R > 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega^3\right)\right).$$

Comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^4}$ admet des pôles simples en ω et ω^3, le calcul de ces résidus lorsque $R > 1$ est immédiat :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega\right) = \frac{1}{4\omega^3} = -\frac{\omega}{4} \text{ et } \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \omega\right) = \frac{\overline{\omega}}{4}$$

dont il résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{i\pi}{2}\left(-\omega + \overline{\omega}\right) = -\frac{i\pi}{2} \times 2i\Im(\omega) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exemple 2

On généralise l'exemple précédent pour calculer la transformée de Fourier[♫] $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dt}{1+t^4}$. On intègre sur le même lacet : la formule des résidus fournit, sachant que $\omega^8 = 1$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{e^{izx}dz}{1+z^4} = \mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^4}, \omega\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{1+z^4}, \omega^3\right) = \frac{e^{i\omega x}}{4\omega^3} + \frac{e^{i\omega^3 x}}{4\omega} = -i\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Par ailleurs, si z est un complexe dont la partie imaginaire est positive ou nulle et si $x \geq 0$, $\left|e^{izx}\right| = e^{\Re(izx)} = e^{-x\Im z} \leq 1$. Ainsi, lorsque $x \geq 0$, l'intégrale le long du demi cercle δ_R tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$, puisque, par majoration standard, lorsque $R > 1$,

$$\left|\int_{\delta_R} \frac{e^{izx}dz}{1+z^4}\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

[♫] Joseph Fourier, 1786–1830

Enfin, un changement de variable $t \rightsquigarrow -t$ montre immédiatement que $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dt}{1+t^4}$ est une fonction paire. On en conclut que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}} \left(\sin \frac{|x|}{\sqrt{2}} + \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Exemple 3

Il s'agit de calculer la transformée de Fourier (-Plancherel♫) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{itx} dt$ de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ en tout point $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. Cette intégrale est (semi-)convergente, comme le montre classiquement une intégration par parties sur un intervalle compact de la forme $[-a, b]$ où $a, b > 0$ suivi d'un passage à la limite $(a, b) \to (+\infty, , +\infty)$.
[Pour intégrer par parties, calculer une primitive de $e^{itx} \sin t$ et dériver $\frac{1}{t}$, ce qui permet de se ramener à une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.]
Inutile, ici, de chercher une primitive de l'intégrand en termes de fonctions usuelles, il n'y en a pas — c'est un théorème qui ressort de la théorie de Galois♫ différentielle, hors de portée du présent discours.
En $x = \pm 1$, cette intégrale diverge. En revanche, pour $x = 1$ et pour $x = -1$, l'intégrale $\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t} e^{ixt} dt$ a quand même une limite lorsque R tend vers $+\infty$.

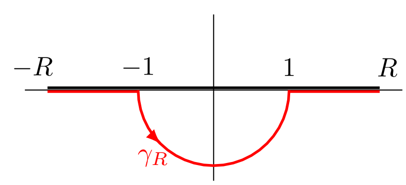
On montre que

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t} e^{itx} dt \right) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = \pm 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases} \tag{21}$$

La fonction $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ présente à l'origine un point régulier : elle se prolonge par continuité en une fonction entière valant 1 en 0. En revanche, les fonctions $z \mapsto \frac{e^{iwz}}{z}$ présentent un pôle simple en 0. Pour éloigner ce pôle de l'intervalle d'intégration lors de la décomposition $2i \sin t = e^{it} - e^{-it}$, on change de chemin.

Soit $R > 0$. On note γ_R le concaténé du segment $S(-R, -1)$, du demi-cercle dans le demi-plan $\{z,\ \Im(z) \leq 0\}$ parcouru une fois dans le sens direct de -1 à 1 dont un paramétrage est par exemple $t \in [0, \pi] \to -e^{it}$, puis enfin du segment $S(1, R)$. Le segment $S(-R, R)$ et γ_R sont évidemment homotopes dans $\mathbb{C}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t} e^{itx} dt = \int_{\gamma_R} \frac{\sin z}{z} e^{izx} dz.$$



Pour tous $R > 0$ et $w \in \mathbb{R}$, on note — cela a du sens puisque le chemin γ_R évite l'origine —

$$f(R, w) = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iwz}}{z} dz,$$

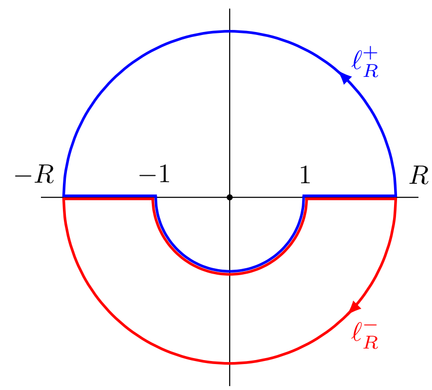
si bien que notre intégrale s'écrit

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t} e^{itx} dt = \frac{f(R, x+1) - f(R, x-1)}{2i}. \tag{22}$$

On complète le chemin γ_R pour en faire un lacet, de deux façons — pour une illustration, voir le dessin ci-dessous. On note ℓ_R^+ le lacet formé de la concaténation de γ_R et du demi-cercle $t \in [0, \pi] \to Re^{it}$ dans le demi-plan $\Im z \geq 0$ et ℓ_R^- le lacet formé de la concaténation de γ_R et du demi-cercle $t \in [0, \pi] \to Re^{-it}$ dans le demi-plan $\Im z \leq 0$. La fonction $z \mapsto e^{iwz}/z$ étant méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ne présentant qu'un unique pôle — simple, en 0 —, la formule des résidus montre que, pour tout $w \in \mathbb{R}$ et pour tout $R > 0$,

$$\int_{\ell_R^+} \frac{e^{iwz}}{z} dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iwz}}{z}, 0 \right) = 2i\pi \quad \text{et} \quad \int_{\ell_R^-} \frac{e^{iwz}}{z} dz = 0.$$

♫Michel Plancherel, 1885–1967
♫Evariste Galois, 1811–1832



En paramétrant les deux demi-cercles, ces formules montrent que $f(R,w)$ s'écrit de deux façons : pour tous $R>0$ et $w \in \mathbb{R}$,

$$f(R,w) = 2i\pi - i\int_0^\pi \exp\left(iwRe^{it}\right)dt = i\int_0^\pi \exp\left(iwRe^{-it}\right)dt.$$

Une fois ces expressions acquises, on s'occupe de l'asymptotique, lorsque R tend vers l'infini, de $f(R,w)$. Pour tous $w, t \in \mathbb{R}$ et $R>0$, $\left|\exp\left(iwRe^{it}\right)\right| = \exp \Re\left(iwRe^{it}\right) = \exp\left(-wR\sin t\right)$. En particulier, lorsque R tend vers $+\infty$, $\exp\left(iwRe^{it}\right)$ tend vers 0 dès lors que w et $\sin t$ ont le même signe. On applique alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue aux intégrales ci-dessus, ce qui entraîne que

$$\lim_{R\to+\infty} f(R,w) = \begin{cases} 2i\pi & \text{si} \quad w>0 \\ i\pi & \text{si} \quad w=0 \\ 0 & \text{si} \quad w<0. \end{cases}$$

En combinant cette disjonction des cas avec la formule (22), on a démontré les égalités (21) attendues.

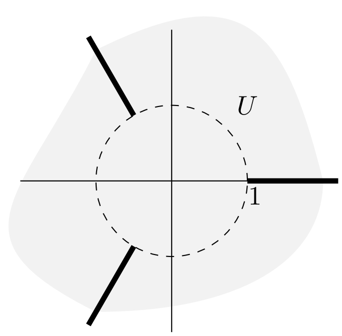
5.5 Un exemple de transformation conforme

Le théorème de transformation conforme de Riemann assure que *tout ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$, qui ne soit ni vide ni $\mathbb{C}$ tout entier, est analytiquement difféomorphe (on dit aussi* conforme*) au disque unité.* Cerise sur le gâteau, on peut écrire des preuves constructives de cet éblouissant résultat. On en donne ici un petit aperçu, sous la forme de l'étude d'une intégrale de Schwarz-Christoffel très particulière.

On note D le disque unité ouvert et $\overline{D}$ son adhérence topologique. On note aussi $\overline{T}$ l'enveloppe convexe du triplet $\left\{1, j, j^2\right\}$ où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$, et T son intérieur topologique. L'objet de ce paragraphe consiste à donner un difféomorphisme analytique explicite entre D et T.

La fonction S

Si le symbole $\sqrt[3]{\cdot}$ désigne la racine cubique principale, la fonction $z \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la réunion des trois demi-droites $\mathcal{R} = ([1,+\infty[) \cup (j[1,+\infty[) \cup \left(j^2[1,+\infty[\right)$.



On note S la fonction définie sur U par l'intégrale curviligne

$$S(z) = \int_{[0\rightsquigarrow z]} \frac{dz}{\sqrt[3]{\left(1-z^3\right)^2}},$$

où le symbole $[0 \rightsquigarrow z]$ désigne n'importe quel chemin de U dont l'origine est 0 et l'extrémité z. Puisque U est simplement connexe, la fonction S est bien définie, l'intégrale curviligne ne dépendant pas du chemin choisi. En outre, S est holomorphe : sur le connexe U, c'est l'unique primitive de $z \mapsto \left(1-z^3\right)^{-\frac{2}{3}}$ qui s'annule en 0.

L'ouvert U est étoilé par rapport à l'origine. Pour tout $z \in U$, le calcul de S en utilisant la paramétrisation standard du segment $[0, z]$ — inclus dans U — mène à l'écriture

$$S(z) = z \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{\left(1 - t^3 z^3\right)^2}}, \tag{23}$$

qui montre immédiatement que

$$\forall z \in U,\ S(jz) = jS(z). \tag{24}$$

En outre,

$$\forall t \in [0, 1[,\ \forall z \in \overline{D}, \quad \left| \frac{1}{\left(1 - t^3 z^3\right)^{\frac{2}{3}}} \right| = \frac{1}{\left|1 - t^3 z^3\right|^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{\left(1 - t^3\right)^{\frac{2}{3}}}\ ;$$

puisque le dernier membre de cette inégalité est intégrable sur $[0, 1]$, cette inégalité de domination montre que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z| \leq 1}} S(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{\left(1 - t^3\right)^2}} = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1 - t)^{-2/3} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \approx 1,77$$

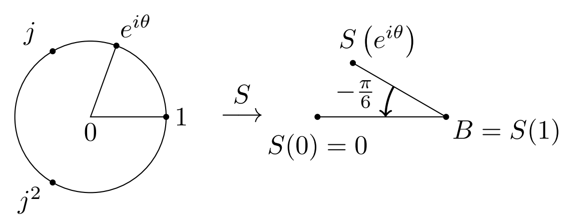
où B désigne la fonction *Beta* d'Euler[♫] — changer de variable sous l'intégrale pour obtenir la deuxième égalité. On note B cette limite. La formule (24) montre alors que S se prolonge par continuité à $\overline{D}$ par les formules

$$S(1) = B,\ S(j) = jB,\ S\left(j^2\right) = j^2 B.$$

Comment S transforme le cercle unité

On note encore S le prolongement par continuité de S à $U \cup \left\{1, j, j^2\right\}$ qui vient d' etre établi. On calcule l'image par S du cercle unité ∂D.

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, on calcule l'angle au point $S(1)$ entre le point $S\left(e^{i\theta}\right)$ et l'origine $S(0) = 0$, c'est-à-dire l'argument du nombre complexe $\frac{S\left(e^{i\theta}\right) - S(1)}{0 - S(1)}$. Puisque $S(1)$ est un réel strictement positif, cet angle orienté de vecteurs est aussi $\arg\left(S(1) - S\left(e^{i\theta}\right)\right)$.



On calcule $S(1) - S\left(e^{i\theta}\right)$. Puisque $S(z)$ est aussi l'intégrale curviligne le long du segment $[0, 1]$ suivi de l'arc de cercle unité joignant 1 à $e^{i\theta}$, on obtient :

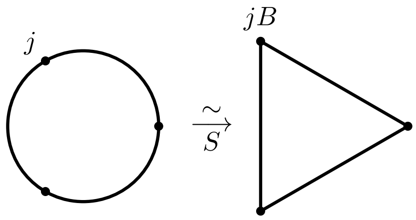
$$S(1) - S\left(e^{i\theta}\right) = -\int_0^\theta \frac{ie^{it} dt}{\left(1 - e^{3it}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Or, lorsque $0 < t \leq \theta < \frac{2\pi}{3}$, il vient $1 - e^{3it} = -2ie^{\frac{3it}{2}} \sin\frac{3t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2} e^{i\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$, si bien que, puisque $\sin\frac{3t}{2} > 0$, la détermination principale de la racine cubique s'écrit $\left(1 - e^{3it}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\sin\frac{3t}{2}}} e^{i\left(-t + \frac{\pi}{3}\right)}$. En reportant cela dans l'intégrale, on obtient

$$S(1) - S\left(e^{i\theta}\right) = e^{-\frac{i\pi}{6}} \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt[3]{2\sin\frac{3t}{2}}}.$$

Cette dernière intégrale étant un nombre réel strictement positif lorsque $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$, cela montre que l'angle orienté entre les vecteurs $S(0) - S(1)$ et $S\left(e^{i\theta}\right) - S(1)$ a une mesure principale constante, égale à $-\frac{\pi}{6}$ — voir une illustration sur le dessin ci-dessus.

[♫] Célébrissime, B est la fonction $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$.



Si on ajoute à cela le fait que $\displaystyle\int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt[3]{2\sin\frac{3t}{2}}}$ est une fonction strictement croissante de θ, on obtient que S induit un homéomorphisme de l'arc de cercle (compact) $\left\{e^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}\right\}$ sur le segment $[B, jB]$. La formule (24) permet de "faire tourner" ce résultat. On obtient ainsi que, par restriction,

> *S induit un homéomorphisme du cercle ∂D sur le triangle équilatéral ∂T.*

Comment S transforme le disque unité

Il résulte du corollaire page 71 sur le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe que, puisque S est continue sur $\overline{D}$ et holomorphe dans D, pour tout $w\in\mathbb{C}$, le nombre de solutions dans D de l'équation $S(z)=w$ égale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{S'(z)dz}{S(z)-w}$$

où le chemin $\gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto e^{it}$ est une paramétrisation du cercle unité parcouru une fois dans le sens direct — a vrai dire, pour obtenir cela, il est prudent d'écrire la formule en intégrant sur des cercles de rayons strictement inférieurs à 1, puis de passer à la limite en faisant tendre ces rayons vers 1. Or, il ressort de l'étude ci-dessus que la composée $S\circ\gamma$ est continue sur $[0,2\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[$,$\left]\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right[$ et $\left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right[$. Autrement dit, $S\circ\gamma$ est encore un chemin de $\mathbb{C}$. Toujours en vertu de ce qui précède, son support est ∂T — parcouru une fois dans le sens direct. Il suffit alors d'écrire le changement de variable et de reconnaître la formule de l'indice :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{S'(z)dz}{S(z)-w} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(S\circ\gamma)'(t)dt}{S\circ\gamma(t)-w} = \frac{1}{2i\pi}\int_{S\circ\gamma}\frac{dz}{z-w} = \mathrm{Ind}_{S\circ\gamma}(w).$$

Cela permet de montrer que S est injective sur D et que l'image de D par S est T tout entier. En effet, si $z_0\in D$, alors le nombre de solutions dans D de l'équation $f(z)=f(z_0)$ est l'indice de $S\circ\gamma$ qui est 0 ou 1 puisque $S\circ\gamma$ est un lacet simple qui parcourt le triangle ∂T dans le sens direct. Cela montre l'injectivité. Enfin, si $w\in T$, le nombre de solutions dans D de l'équation $f(z)=w$ est l'indice de w par rapport à $S\circ\gamma$, qui est 1 : cela démontre que $T\subseteq S(D)$. L'inclusion inverse peut se faire par un argument de connexité comme suit. L'image de D par S est un connexe de $\mathbb{C}$ qui contient 0 et est contenu dans le complémentaire de ∂T : cette image est dans T. Ainsi, on a montré la surjectivité.

On a montré que S est une application holomorphe et bijective $D\to T$. C'est donc un difféomorphisme analytique entre D et T, comme le garantit la proposition de la page 55.

Conclusion

> L'application de Schwarz-Christoffel S induit un difféomorphisme analytique entre D et T.