UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 8

1 Critère d'Eisenstein

Le critère d'Eisenstein est une condition suffisante d'irréductibilité des polynômes sur un anneau factoriel dont l'énoncé est le suivant.

Théorème (critère d'Eisenstein)
Soient A un anneau factoriel, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in A[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$ et $p \in A$, irréductible. On suppose que
(i) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$;
(ii) p ne divise pas a_d ;
(iii) p^2 ne divise pas a_0 ;
(iv) les coefficients de P sont premiers entre eux.
Alors, P est irréductible sur A.

1.1) Prouver le critère d'Eisenstein.
[Pour cela, avec les notations de l'énoncé, on pourra supposer que $P = QR$ dans $A[X]$ et réduire cette égalité modulo p, c'est-à-dire écrire comment elle se transpose dans l'anneau quotient $A/(p)$.]

1.2) Une application classique
Soient p un nombre premier et $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1} \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
[Indication : il suffit de montrer que $Q = P(X + 1)$ est irréductible. En calculant préalablement XQ, appliquer le critère d'Eisenstein à Q.]

3) Soit $P = X^5 - 11X - 165$. Etudier la réductibilité de P sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$. Les anneaux $\mathbb{Z}[X]/(P)$ et $\mathbb{Q}[X]/(P)$ sont-ils intègres ?

2 Transfert de Gauss

L'énoncé, vu en cours, est le suivant. On en trouve une preuve au cours de l'exercice.

Théorème (transfert de Gauss) *Si A est un anneau factoriel, alors $A[X]$ est aussi factoriel.*

Dans toute la suite, A est un anneau factoriel dont on fixe un système de représentants d'irréductibles $\mathcal{I}$. On note K le corps des fractions de A.

2.1) Contenu d'un polynôme
Si $P \in A[X]$ est non nul, on appelle *contenu* de P le PGCD de ses coefficients (relatif à $\mathcal{I}$) ; on le note $c(P)$. On dit que P est *primitif* lorsque $c(P) = 1$. Montrer que si P et Q sont des polynômes non nuls de $A[X]$, alors

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

[On pourra étudier d'abord le cas où P et Q sont primitifs.]

2.2) Irréductibles de $A[X]$
Montrer que les polynômes irréductibles de $A[X]$ sont :
(i) les polynômes constants p où $p \in A$ est irréductible ;
(ii) les polynômes non constants, primitifs, irréductibles dans $K[X]$.

2.3) Existence d'une factorisation

Soit $P \in A[X]$, non nul. Montrer que P se factorise le produit d'un inversible et d'un produit de polynômes irréductibles dans $A[X]$.
[On pourra étudier d'abord le cas où P est primitif.]

2.4) Unicité d'une factorisation
Montrer que si P est n'importe quel polynôme irréductible dans $A[X]$, l'idéal $PA[X]$ qu'il engendre est un idéal premier de $A[X]$. En déduire que $A[X]$ est factoriel.

2.5) Montrer que si k est un corps, alors $k[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau factoriel ($n \geq 1$).

2.6) Montrer que si k est un corps et J un ensemble quelconque, alors $k[(X_j)_{j\in J}]$ est un anneau factoriel.

2.7) Application
Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que le polynôme $Y^2 - X(X-1)(X-a)$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$.
[On pourra applique le critère d'Eisenstein dans $\mathbb{C}[X][Y]$.]

2.8) Autre application de la multiplicativité du contenu
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un polynôme $\nu \in \mathbb{Z}[X]$, irréductible tel que $\nu(\alpha) = 0$. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathbb{Z}[X]/(\nu)$ sont isomorphes.
[On pourra utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{Q}$, et la multiplicativité du contenu des polynômes à coefficients entiers.]