UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

# Feuille d'exercices numéro 6

## 1 Quelques entiers du nombre d'or

On note $\omega$ le nombre d'or, c'est-à-dire la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$. On note aussi $\overline{\omega}$ la racine négative de ce polynôme.

**1.1)** Montrer que $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + \omega b,\ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\overline{\omega}]$. La décomposition de tout $x \in \mathbb{Z}[\omega]$ en $x = a + \omega b$, $a, b \in \mathbb{Z}$ est-elle unique ? Calculer $\overline{\omega}$ et $1/\omega$ sous la forme $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$.

**1.2)** Pour tout $x = a + \omega b \in \mathbb{Z}[\omega]$, on note $\overline{x} = a + \overline{\omega} b$ et $N(x) = x\overline{x}$. Montrer que $N$ est à valeurs entières. Montrer que $x \mapsto \overline{x}$ est un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{Z}[\omega]$. En déduire que $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}[\omega]$.

**1.3)** Soit $x \in \mathbb{Z}[\omega]$. Montrer que $x$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\omega]$ si, et seulement si $N(x)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\omega]$ est infini.

**1.4)** Montrer que $(5)$ n'est pas un idéal premier de $\mathbb{Z}[\omega]$ mais que $(2)$ l'est. Les idéaux $(7 + \omega)$ et $(2 + \omega)$ sont-ils premiers ? Sont-ils maximaux ?

## 2 Introduction à l'algébricité

**2.1)** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

**2.2)** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbb{Q}[X]$, irréductible tel que $\mu(\alpha) = 0$. Montrer que tout élément de $\mathbb{Q}[\alpha]$ s'écrit, *de manière unique*, sous la forme $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{d-1}\alpha^{d-1}$ où $d$ est le degré de $\mu$ et où les $a_k$ sont rationnels. [Pour l'unicité, on pourra utiliser la principalité de $\mathbb{Q}[X]$.]

**2.3)** Montrer que les anneaux $\mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}[X]/(\mu)$ sont isomorphes.

**2.4)** En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.

**2.5)** Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, de dimension $d$. En donner une base.

## 3 Plusieurs indéterminées

**3.1)** Montrer que $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y)$ est un anneau principal.

**3.2)** Montrer que les anneaux $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ et $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$ sont isomorphes (changer de variables).

**3.3)** Les polynômes à deux indéterminées suivants :

$$\text{(i) } Y - X^2 \quad \text{(ii) } X^2 + Y^2 - 1 \quad \text{(iii) } X^2 + Y^2 + 1 \quad \text{(iv) } X^2 - Y^2 - 1$$

$$\text{(v) } Y^2 - X^3 \quad \text{(vi) } X^3 - X - Y^2 \quad \text{(vii) } XY^3 - X^2Y - Y^2 + X$$

sont-ils irréductibles sur $\mathbb{C}$ ? Sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque $p$ est un nombre premier ?

**3.4)** Montrer que dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X, Y]/(X^2)$, il y a des polynômes non constants inversibles. Se rappeler pourquoi ceci est impossible sur un anneau intègre.

## 4 Nombres de racines et intégrité

Soit $A$ un anneau différent de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2)$. Montrer qu'il y a équivalence entre
(i) $A$ est intègre ;
(ii) dans $A[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout polynôme unitaire de degré $n$ a au plus $n$ racines ;
(iii) dans $A[X]$, tout polynôme unitaire de degré 2 a au plus 2 racines.
[Pour montrer (iii)$\Rightarrow$(i), lorsque $ab = 0$, on pourra raisonner à partir du polynôme $X(X - a + b)$.]
Etudier à part le cas des anneaux $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2)$.

## 5 Intersection de deux courbes algébriques planes

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$ sans facteur commun.

**5.1)** Montrer qu'il existe $U$ et $V$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et $D \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tels que $D = UP + VQ$.
[On pourra raisonner dans l'anneau $\mathbb{C}(X)[Y]$.]

**5.2)** Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2,\ P(x, y) = 0 \text{ et } Q(x, y) = 0\}$ est fini.
[Cette partie finie de $\mathbb{C}^2$ est l'intersection des deux courbes ayant respectivement $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ pour équations cartésiennes.]

## 6 Idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$

**1-** Montrer que tout idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$ est de la forme $(X - a, Y - b)$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
[On pourra d'abord montrer que ces idéaux sont maximaux. Ensuite, lorsque $I$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$, on considérera $\mathbb{C}[X] \cap I$, qui est un idéal premier de $\mathbb{C}[X]$.]

**2-** Montrer qu'aucun idéal principal de $\mathbb{C}[X, Y]$ n'est maximal.
[Si $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, on considérera un idéal de la forme $(P, X - a)$ où $a$ est *ad hoc*.]

**3-** Montrer qu'un idéal premier non principal de $\mathbb{C}[X, Y]$ est nécessairement maximal.
[Prendre $I$ premier non nul et montrer que si $I \cap \mathbb{C}[X] = (0)$, alors $I$ est principal. Pour cela, considérer $P \in I$ non nul dont le degré en $Y$ est minimal et dont les coefficients vus dans $\mathbb{C}[X][Y]$ n'ont pas de facteur commun.]

**4-** Décrire tous les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$.

## 7 Cône

Soit $\mathbb{F}$ un corps. Montrer que l'anneau $\mathbb{F}[X, Y, Z, T]/(XY - ZT)$ n'est pas factoriel.

## 8 Point de rebroussement de première espèce

On note $A$ l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^3 - X^2)$.

**8.1)** Montrer que l'application $\mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[T]$, $P \mapsto P(T^3, T^2)$ est un homomorphisme d'anneaux dont le noyau est $(Y^3 - X^2)$. En déduire que $Y^3 - X^2$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

**8.2)** Montrer que $B = \{P \in \mathbb{C}[T],\ P'(0) = 0\}$ est le sous-anneau $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ de $\mathbb{C}[T]$ engendré par $\mathbb{C}$, $T^2$ et $T^3$.

**8.3)** Montrer que $A$ et $B$ sont isomorphes.

**8.4)** Montrer que $T^2$ et $T^3$ sont des irréductibles non associés de $B$. En déduire que $A$ n'est pas factoriel.

**8.5)** Trouver un idéal non principal de $A$.

## 9 Une intersection non complète

Soit $I$ l'idéal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ engendré par $Y - X^2$, $Z - X^3$ et $Y^2 - XZ$.

**9.1)** Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}[X, Y, Z] \to \mathbb{C}[T]$, $P \mapsto P(T, T^2, T^3)$ est un homomorphisme surjectif d'anneaux dont le noyau contient $I$.

**9.2)** Calculer le noyau de $\varphi$.

[On pourra prendre $P \in \ker \varphi$, montrer par divisions euclidiennes successives qu'il s'écrit sous la forme $(Y - XZ)A(X, Y, Z) + (Y - X^2)B(X, Z) + (Z - X^2)C(X, Z) + D(X)$ et conclure que $P \in I$.]

**9.3)** Montrer que $I$ est un idéal premier non maximal et que le quotient $\mathbb{C}[X, Y, Z]/I$ est factoriel.