UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 5

1 Exemples d'anneaux-quotient

1.1) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2+3)$.

1.2) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{18}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2-18)$.

1.3) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$.

[Indication : utiliser la principalité de $\mathbb{Q}[X]$. On pourra montrer que X^3-2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$.]

1.4) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{40}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^3-40)$.

1.5) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(2X-1)$ est isomorphe au sous-anneau $\mathbb{Z}[1/2]$ de $\mathbb{Q}$. Dire tout ce que vous pouvez sur cet anneau.

[Par exemple, comment décrire ses éléments ? Est-il isomorphe à $\mathbb{Z}$? Est-il isomorphe à $\mathbb{Z}[X]$? Est-il isomorphe à $\mathbb{Q}$? D'autres choses encore.]

1.6) Démontrer que l'anneau quotient $A = \mathbb{Z}[X]/(2X)$ est isomorphe à un sous-anneau de l'anneau produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}$ que l'on décrira. L'anneau A est-il intègre ?

1.7) Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{Z}[X]/(4X-2)$ et un sous-anneau d'un anneau produit.

1.8) Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}[X]/(X^4-4)$ a une structure naturelle de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{Q}^4$, mais que les anneaux $\mathbb{Q}[X]/(X^4-4)$ et $\mathbb{Q}^4$ ne sont pas isomorphes. Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{Q}[X]/(X^4-4)$ et le produit de deux sous-corps de $\mathbb{C}$.

1.9) Dans la même veine que l'exercice précédent, montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^4-4)$ est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

1.10) Dans l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[X,Y,Z]/\big(X(1-YZ)\big)$, on note respectivement x, y et z les classes de X, Y et Z.

(i) Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas intègre.

(ii) Montrer que x et xy engendrent le même idéal de $\mathcal{A}$.

(iii) Montrer que les inversibles de $\mathcal{A}$ sont les classes modulo $X(1-YZ)$ des polynômes constants non nuls de $\mathbb{Q}[X,Y,Z]$.

(iv) Montrer que x et xy ne sont pas associés dans $\mathcal{A}$.

2 Exercices généraux

2.1) Soient $\mathcal{A}$ un anneau intègre et $p \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Montrer que (p) premier $\Longrightarrow p$ irréductible.

2.2) Soient $\mathcal{A}$ un anneau factoriel et $p \in \mathcal{A}$. Montrer que p irréductible $\Longrightarrow (p)$ premier.

2.3) Montrer que, dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, l'idéal (3) n'est pas premier alors que 3 est irréductible.

2.4) Montrer que si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux surjectif, l'image réciproque par f de tout idéal maximal de B est un idéal maximal de A. Le résultat subsiste-t-il si on enlève l'hypothèse *surjectif* ?

2.5) Soit $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux. L'image réciproque de tout idéal premier de B est-il un idéal premier de A ?

2.6) Soit A un anneau. Un élément a de A est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $a^n = 0$. On note N l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrer[♪] que N est un idéal de A qui est contenu dans tous les idéaux premiers de A.

[♪] En fait, N est l'intersection des idéaux premiers de A. Le montrer en toute généralité nécessite l'axiome du choix.