UVSQ 2022/2023
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA511 (structures algébriques)

Feuille d'exercices numéro 1

1 Quelques cardinaux

Quels sont les cardinaux des ensembles suivants ?

(i) $\emptyset$ (ii) $\{\emptyset\}$ (iii) $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ (iv) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$ (v) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (vi) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (vii) $\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(viii) $\left\{0, 1, 3, \sqrt{2}, 1+2, 2\times 3\right\}$ (ix) $\{5, 6, 18, 9+8+1\} \cup \{2+3, 2\times 3, 9, 8, 1\}$

(x) $\{5, 6, 18, 9+8+1\} \cap \{2+3, 2\times 3, 9, 8, 1\}$ (xi) $\{0, 1\} \times \{1, 2, 3\}$

(xii) $\mathbb{N}$ (xiii) $\{\mathbb{N}\}$ (xiv) $\{\mathbb{N}, \mathbb{N}\}$ (xv) $\mathbb{N} \cup \{2, 3, 18\}$ (xvi) $\mathbb{N} \cup \left\{\sqrt{2}\right\}$ (xvii) $2\mathbb{N}$ (xviii) $\mathbb{Z}$

(xix) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ (xx) $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ (xxi) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(xxii) $\mathbb{R}$ (xxiii) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$ (xxiv) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ (xxv) $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}$ (xxvi) $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ (xxvii) $\mathbb{R} \times \{\mathbb{R}\}$ (xxviii) $\{\mathbb{R}, \mathbb{N}\}$

(xxix) $\mathbb{R} \cap \{\mathbb{R}\}$ (xxx) $\mathbb{R} \cup \{\mathbb{R}\}$ (xxxi) $\mathbb{R} \times \{\mathbb{R}\}$ (xxxii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [♫]

2 Une construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$

Point de départ : on suppose que l'on connaît l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles. L'exercice consiste à donner une construction formelle de l'anneau $\mathbb{Z}$.

On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \forall (z, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ (x, y)\mathcal{R}(z, t) \Longleftrightarrow x + t = y + z.$$

2.1) Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$. On note $\mathrm{cl}(x, y)$ la classe de $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2.2) Montrer que l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \mathrm{cl}(x, 0)$ est une application injective.

2.3) Montrer que les formules $\mathrm{cl}(x, y) + \mathrm{cl}(z, t) = \mathrm{cl}(x + z, y + t)$ et $\mathrm{cl}(x, y) \times \mathrm{cl}(z, t) = \mathrm{cl}(xz + yt, xt + yz)$ définissent proprement deux lois de composition interne sur $\mathbb{Z}$.

2.4) Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif (unitaire). Quel est son zéro ? Quelle est son unité ? Quel est l'opposé de l'entier relatif $\mathrm{cl}(x, y)$? Montrer que, dans $\mathbb{Z}$, le produit de deux éléments non nuls est non nul (on dit que l'anneau $\mathbb{Z}$ est *intègre*).

2.5) Interpréter, en référence aux opérations usuelles de $\mathbb{Z}$, la classe du couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et chercher les mots pour raconter l'histoire de cette construction (ultra classique) de $\mathbb{Z}$ "avec les mains" (sans utiliser de notation). Tâcher notamment de dégager l'intervention de la relation d'équivalence.

3 Une construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$

Trouver une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ qui construise $\mathbb{Q}$ comme un quotient de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Faire cette construction soigneusement. Notamment, définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ qui traduisent celles de $\mathbb{Q}$ et montrer que $\mathbb{Q}$ est un corps qui "contient" $\mathbb{Z}$.

[♫] Trouver une injection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est facile. Trouver une injection $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ nécessite d'être plus inventif. Un exemple : à partir des développements propres en base 2, prendre l'application $\left(\sum_n a_n 2^{-n}, \sum_n b_n 2^{-n}\right) \mapsto \sum_n a_n 2^{-2n} + \sum_n b_n 2^{-2n-1}$.

4 Fonctions périodiques

Soit $T > 0$. Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite T-périodique lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

4.1) On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $x\mathcal{R}y \iff x - y \in T\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. L'ensemble quotient, noté $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, est appelé *tore*.

4.2) Montrer que toute application T-périodique se factorise *via* la projection canonique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, en une application $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

A noter Ce point de vue est important dans l'étude des séries de Fourier des applications périodiques (dont 2π est une période, pour la théorie standard).

5 Germes d'applications dérivables

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{G}_a$ l'ensemble des couples (I, f) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a et f une application dérivable $I \to \mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{G}_a$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante : $\forall (I, f) \in \mathcal{G}_a,\ \forall (J, g) \in \mathcal{G}_a$, $(I, f)\mathcal{R}(J, g)$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$ qui contienne a et qui soit tel que

$$\forall x \in I \cap J \cap K,\ f(x) = g(x).$$

5.1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{G}_a$. L'ensemble quotient $\mathcal{G}_a/\mathcal{R}$ est l'ensemble des *germes d'applications dérivables en* a.

5.2) En appliquant la propriété universelle du quotient des applications, montrer que l'application $\mathcal{G}_a \to \mathbb{R}$, $(I, f) \mapsto f'(a)$ se factorise en une application surjective $\mathcal{G}_a/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$.

A noter En topologie, la notion de germe sert à exprimer les propriétés *locales* des applications. Par exemple, on parle de germe d'applications réelles continues en un point d'un espace métrique, de germe d'applications réelles de classe $\mathcal{C}^p$ en un point de $\mathbb{R}$, de germe d'applications holomorphes en un point de $\mathbb{C}$, etc.

6 Applications injectives et surjectives

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective}$$

et que

$$g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective.}$$

7 Images et images réciproques

7.1) Soit $f : X \to Y$ une application. Soient A et B deux parties de X. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

$$\text{(i) } f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B) \qquad \text{(ii) } f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$$
$$\text{(iii) } f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \qquad \text{(iv) } f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$$
$$\text{(v) } A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B) \qquad \text{(vi) } f(A) \subseteq f(B) \Longrightarrow A \subseteq B$$

7.2) Soit $f : X \to Y$ une application. Soient A et B deux parties de Y. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

$$\text{(vii) } f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{(viii) } f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$\text{(ix) } f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \qquad \text{(x) } f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$\text{(xi) } A \subseteq B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \qquad \text{(xii) } f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \Longrightarrow A \subseteq B$$

7.3) Soient $f : X \to X$ une application et A une partie de X. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

$$\text{(xiii) } A \subseteq f^{-1}(f(A)) \qquad \text{(xiv) } A \supseteq f^{-1}(f(A)) \qquad \text{(xv) } A \subseteq f\left(f^{-1}(A)\right) \qquad \text{(xvi) } A \supseteq f\left(f^{-1}(A)\right)$$