Le début du triangle de Pascal

1	1																		
1	2	1																	
1	3	3	1																
1	4	6	4	1															
1	5	10	10	5	1														
1	6	15	20	15	6	1													
1	7	21	35	35	21	7	1												
1	8	28	56	70	56	28	8	1											
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1									
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1								
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1							
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1						
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1					
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

La formule du triangle de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

1	1																		
1	2	1																	
1	3	3	1																
1	4	6	4	1															
1	5	10	10	5	1														
1	6	15	20	15	6	1													
1	7	21	35	35	21	7	1												
1	8	28	56	70	56	28	8	1											
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	120 +	45	10	1									
1	11	55	165	330	462	462	330	= 165	55	11	1								
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1							
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1						
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1					
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448 +	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	= 31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

Triangle de Pascal : somme des débuts des colonnes

1	1																		
1	+ 2	1																	
1	+ 3	3	1																
1	+ 4	6	4	1															
1	5	10	10	5	1														
1	6	15	20	15	6	1													
1	7	21	35	35	21	7	1												
1	8	28	56	70	56	28	+ 8	1											
1	9	36	84	126	126	84	+ 36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	+ 120	45	10	1									
1	11	55	165	330	462	462	+ 330	165	55	11	1								
1	12	66	220	495	792	924	+ 792	495	220	66	12	1							
1	13	78	286	715	1287	1716	+ 1716	1287	715	286	78	13	1						
1	14	91	364	1001	2002	3003	+ 3432	3003	2002	1001	364	91	14	1					
1	15	105	455	1365	3003	5005	+ 6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	+ 11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal : somme des lignes

1	1																			
1	+ 2	+ 1																		$= 2^2$
1	3	3	1																	
1	4	6	4	1																
1	+ 5	+ 10	+ 10	+ 5	+ 1															$= 2^5$
1	6	15	20	15	6	1														
1	7	21	35	35	21	7	1													
1	8	28	56	70	56	28	8	1												
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						$\rightarrow$ somme $= 2^{14}$
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Triangle de Pascal : lignes premières

1	1																		
1	2	1																	
1	3	3	1																
1	4	6	4	1															
1	5	10	10	5	1														
1	6	15	20	15	6	1													
1	7	21	35	35	21	7	1												
1	8	28	56	70	56	28	8	1											
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1									
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1								
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1							
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1						
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1					
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

p divise $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$

Les nombres de Catalan cachés

1	1																		
1	2	1																	
1	3	3	1																
1	4	6	4	1															
1	5	10	10	5	1														
1	6	15	20	15	6	1													
1	7	21	35	35	21	7	1												
1	8	28	56	70	56	28	8	1											
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1										
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1									
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1								
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1							
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1						
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1					
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$C_1 = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$

$C_2 = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$

$C_3 = \frac{20}{4} = \mathbf{5}$

$C_4 = \frac{70}{5} = \mathbf{14}$

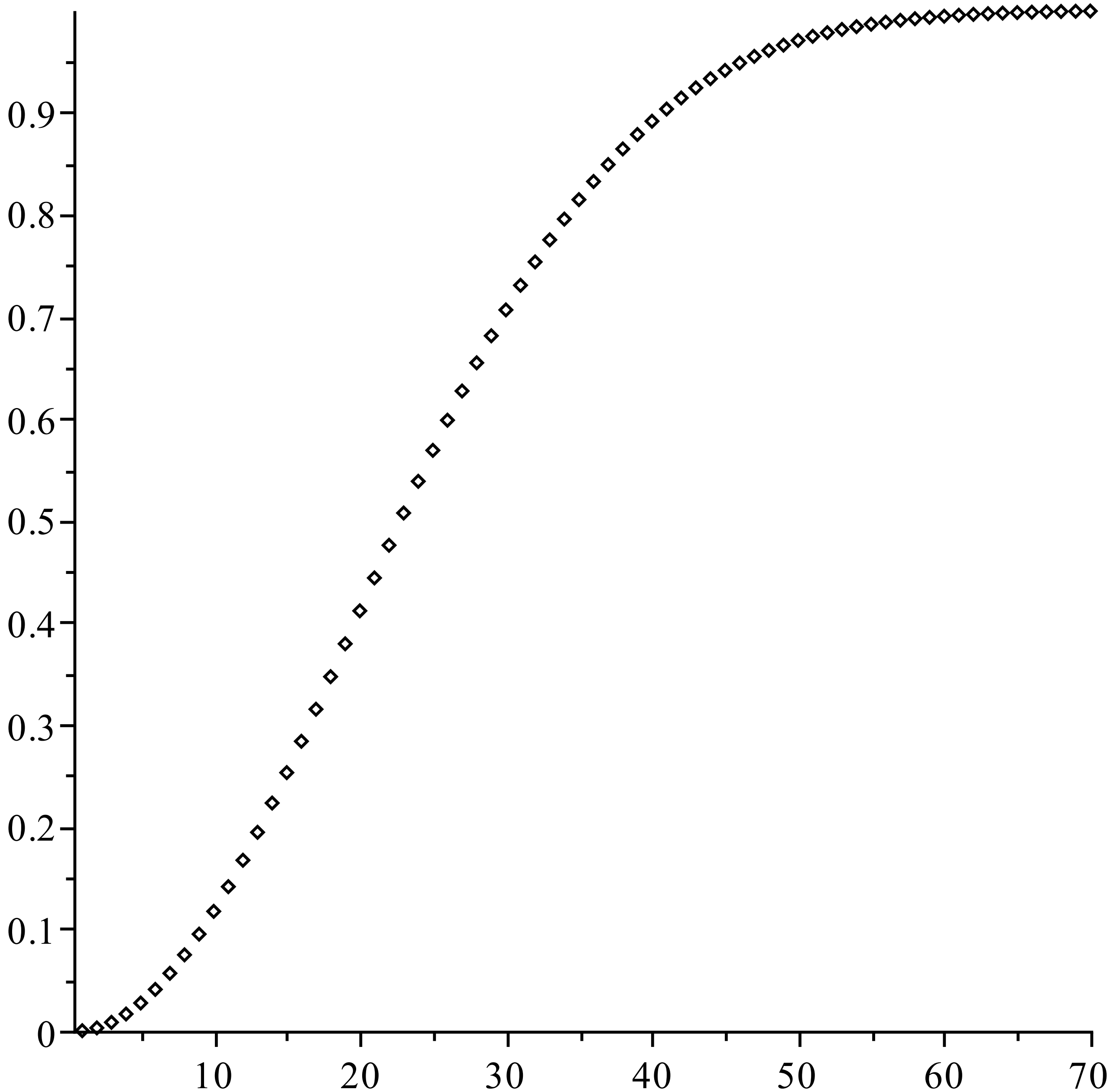
$C_5 = \frac{252}{6} = \mathbf{42}$

$C_6 = \frac{924}{7} = \mathbf{132}$

$C_7 = \frac{3432}{8} = \mathbf{429}$

$C_8 = \frac{12870}{9} = \mathbf{1430}$

$C_9 = \frac{48620}{10} = \mathbf{4862}$



Courbe du paradoxe des anniversaires