Introduction aux processus de Pólya

Nicolas Pouyanne

Laboratoire de mathématiques de Versailles
CNRS, UMR 8100
Université de Versailles - Saint-Quentin
45, avenue des Etats-Unis
78035 Versailles cedex
pouyanne@math.uvsq.fr

Monastir, 29 mai 2007

Table des matières

1 Introduction

Dans un processus d'urne de Pólya-Eggenberger à 2 couleurs, on dispose d'une urne de capacité infinie et de boules noires et rouges. On part d'une configuration initiale $U_1 = {}^t(n_1, r_1)$ et on procède à des tirages successifs d'une boule prise au hasard dans l'urne, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée. A chaque instant, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle qui reste la même pendant tout le processus : si on a tiré une boule noire, on ajoute α boules noires et β boules rouges ; si on a tiré une boule rouge, on ajoute γ boules noires et δ boules rouges. Cette règle est résumée par la matrice de remplacement de l'urne

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

A un coefficient négatif x de R correspond le retrait de $-x$ boules de la couleur associée. L'urne sera supposée *équilibrée de balance* S, ce qui signifie que le nombre total de boules ajoutées est invariablement S à chaque opération : $\alpha + \beta = \gamma + \delta = S$.

Le processus vectoriel de l'urne est la suite $(U_n)_n$ de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^2$, dont l'abscisse (*resp.* l'ordonnée) est le nombre de boules noires (*resp.* rouges) que contient l'urne à l'issue du $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage.

La question posée ici est celle de l'asymptotique du vecteur U_n de composition de l'urne. Afin de garantir la non extinction de l'urne, on la supposera *viable* au sens habituel suivant : $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$ ou ($\alpha|\beta$ et $\alpha|n_1$), $\delta \geq 0$ ou ($\delta|\gamma$ et $\delta|r_1$) (commentaire). Les hypothèses sur la matrice de remplacement assurent qu'elle est diagonalisable et que ses valeurs propres sont S et un nombre entier $S\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Q}_{\leq 1}$. Dans ces conditions, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1 *Soit U_n le vecteur de composition d'un processus d'urne de Pólya-Eggenberger de balance S, avec les notations précédentes.*

1- Si $\lambda < 1/2$, sous une certaine hypothèse d'irréductibilité, il existe un vecteur déterministe v_1 de $\mathbb{R}^2$ tel que $(\frac{1}{S}U_n - nv_1)/\sqrt{n}$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré.

2- Si $\lambda = 1/2$, sous une certaine hypothèse d'irréductibilité, il existe un vecteur déterministe v_1 de $\mathbb{R}^2$ tel que $(\frac{1}{S}U_n - nv_1)/\sqrt{n \log n}$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré.

3- Si $\lambda > 1/2$, il existe deux vecteurs déterministes v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^2$ et une variable aléatoire réelle W tels que $(\frac{1}{S}U_n - nv_1)/n^\lambda$ converge presque sûrement et dans tous les L^p, $p \geq 1$ vers Wv_2.

Méthode de plongement dans le cas irréductible pour le cas des petites urnes (*1-* et *2-*). Méthodes d'analyse combinatoire dans le cas triangulaire. Cas des grandes urnes : rien sur les lois limites. Ici, approche discrète avec première description des lois limites.

Extension en dimension quelconque voire infinie, aux coefficients aléatoires, aux urnes non balancées.

2 Définition et premières notations

On définit la classe des processus de Pólya de dimension deux ; elle est stable par changements linéaires de coordonnées réelles.

Définition 2.1 *Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2. Soient X_1, w_1, w_2 des vecteurs de V et (l_1, l_2) une base de formes linéaires sur V satisfaisant les hypothèses suivantes :*
i- (hypothèse d'initialisation)

$$X_1 \neq 0, \quad l_1(X_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad l_2(X_1) \geq 0 \; ; \tag{1}$$

ii- (hypothèse d'équilibre)

$$l_1(w_1) + l_2(w_1) = 1 \quad \text{et} \quad l_1(w_2) + l_2(w_2) = 1; \tag{2}$$

iii- (condition suffisante de viabilité)

$$\begin{cases} l_1(w_2) \geq 0, \\ l_2(w_1) \geq 0, \\ l_1(w_1) \geq 0 \quad \text{ou} \quad l_1(w_1)\mathbb{Z} = l_1(X_1)\mathbb{Z} + l_1(w_2)\mathbb{Z}, \\ l_1(w_1) \geq 0 \quad \text{ou} \quad l_2(w_2)\mathbb{Z} = l_2(X_1)\mathbb{Z} + l_2(w_2)\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3}$$

Le **processus de Pólya** *associé à ces données est la marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans V et à incréments dans $\{w_1, w_2\}$, définie par X_1 et par la récurrence suivante : pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{cases} \text{Prob } (X_{n+1} = X_n + w_1 | X_n) = \dfrac{l_1(X_n)}{n + \tau_1 - 1}, \\ \text{Prob } (X_{n+1} = X_n + w_2 | X_n) = \dfrac{l_2(X_n)}{n + \tau_1 - 1} \end{cases} \tag{4}$$

où τ_1 est le nombre réel strictement positif défini par

$$\tau_1 = l_1(X_1) + l_2(X_1).$$

L'espace de probabilité sous-jacent sur lequel ce processus aléatoire est défini est celui des trajectoires de $X_1 + \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$.

Les conditions (1) et (2) sont nécessaires et suffisantes pour que X_2 soit défini par les relations (4). Elles entraînent la relation déterministe

$$\forall n \geq 1, \; (l_1 + l_2)(X_n) = n + \tau_1 - 1. \tag{5}$$

qui se prouve par une récurrence immédiate.

Les conditions (3) suffisent à ce que le processus ne s'éteigne presque sûrement pas, c'est-à-dire que les nombres $l_1(X_n)$ et $l_2(X_n)$ restent positifs ou nuls pour tout n. En effet, supposons par récurrence que $l_1(X_n) \geq 0$. Puisque $X_{n+1} - X_n \in \{w_1, w_2\}$, le seul cas pour lequel il n'est pas évident que $l_1(X_{n+1}) \geq 0$ est le cas où $l_1(w_1) < 0$ et $X_{n+1} = X_n + w_1$, ce qui n'arrive avec probabilité non nulle que si $l_1(X_n) > 0$. Dans ces conditions, soient M_1 et M_2 les entiers naturels pour lesquels $X_n = X_1 + M_1 w_1 + M_2 w_2$. Comme $l_1(w_1) < 0$, l'hypothèse (3) assure qu'il existe un entier négatif ou nul M tel que $l_1(X_n) = M l_1(w_1)$. La condition $l_1(X_n) > 0$ assure que $M \leq -1$ et donc que $l_1(X_{n+1}) = (M+1) l_1(w_1) \geq 0$. Par une récurrence analogue, on montre que $l_2(X_n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 2.2 *Soit $(X_n)_n$ un processus de Pólya avec les notations de la définition 2.1. L'***endomorphisme de remplacement** *du processus, noté A, est défini par $A = l_1 \otimes w_1 + l_2 \otimes w_2$, c'est-à-dire par*

$$\forall v \in V, \; A(v) = l_1(v) w_1 + l_2(v) w_2.$$

Proposition 2.3 *Soit A l'endomorphisme de remplacement d'un processus de Pólya de dimension 2. Alors, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs propres sont 1 et un réel $\lambda \leq 1$.*

NB : en dimension supérieure ou égale à 3, il n'est pas vrai que A est toujours diagonalisable.

Preuve. On choisit l_1 et l_2 comme formes coordonnées. Si on note $a = l_2(w_1) \geq 0$ et $b = l_1(w_2) \geq 0$, la matrice de A dans la base correspondante est

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Ses valeurs propres sont 1 et $\lambda = 1 - a - b$, et le seul cas de valeur propre double est $a = b = 0$, c'est-à-dire $A = \mathrm{Id}$. ∎

On adoptera les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = l_2(w_1) \geq 0 \;\text{ et }\; b = l_1(w_2) \geq 0 \;; \\ \lambda = 1 - a - b \;; \end{array} \right. \tag{7}$$

de sorte que la matrice de A dans la base duale de la base (l_1, l_2) est donnée par (6). Lorsque $A \neq \mathrm{Id}$, c'est-à-dire lorsque $\lambda \neq 1$, On notera également

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = l_1 + l_2 \in V^* \;\text{ et }\; u_2 \in \mathbb{R}^*(a l_1 - b l_2) \in V^* \;; \\ (v_1, v_2) \in V^2 \text{ est la base duale de la base } (u_1, u_2). \end{array} \right. \tag{8}$$

Les vecteurs $v_1 = \frac{1}{a+b}{}^t(b, a)$ et $v_2 = \frac{1}{a+b}{}^t(1, -1)$ forment une base de vecteurs propres pour A, respectivement associés aux valeurs propres 1 et λ. Les formes linéaires u_1 et u_2 sont des formes linéaires propres de ${}^tA$, respectivement associées aux valeurs propres 1 et λ. Le choix précis de u_2 sur la droite $\mathbb{R}(al_1 - bl_2)$ n'influe pas sur les raisonnements et permet d'ajuster des paramètres pour simplifier les notations et calculs. Les projections $\pi_1 = u_1 v_1$ et $\pi_2 = u_2 v_2$ permettent la décomposition du processus en la somme $X_n = \pi_1(X_n)+\pi_2(X_n)$ et la relation (5) entraîne l'égalité presque sûre

$$\forall n \geq 1,\ X_n = (n + \tau_1 - 1)v_1 + \pi_2(X_n). \tag{9}$$

Dans le cas très particulier $A = \mathrm{Id}$, on notera $u_1 = l_1$ et $u_2 = l_2$; dans ces conditions, (w_1, w_2) est une base de V, duale de la base (l_1, l_2).

Dans tous les cas, on notera

$$\tau_2 = u_2(X_1).$$

Urnes et processus de Pólya

Le premier exemple de processus de Pólya vient des urnes de Pólya-Eggenberger. En effet, considérons une urne de Pólya-Eggenberger à deux couleurs de balance S, donnée par sa matrice de remplacement et sa composition initiale

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

On note U_n le vecteur de composition de l'urne à l'instant n. Alors, le processus de Pólya $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{S} U_1, \\ w_1 = \frac{1}{S}\ {}^t(\alpha, \beta) \text{ et } w_2 = \frac{1}{S}\ {}^t(\gamma, \delta), \\ l_1(x, y) = x \text{ et } l_2(x, y) = y \end{cases}$$

vérifie $X_n = \frac{1}{S} U_n$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'endomorphisme de remplacement est $A = \frac{1}{S}{}^tR$.

3 Opérateur de transition

On cherche le comportement asymptotique du processus $(X_n)_n$. Cela suggère, pour étudier sa loi, de calculer l'espérance $Ef(X_n)$ pour une classe suffisamment large de fonctions. Par exemple, lorsque f décrit l'espace des polynômes à deux variables, ce sont les moments de X_n que l'on atteint ainsi.

Un calcul immédiat montre que, conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, l'espérance de X_n s'écrit

$$E^{\mathcal{F}_n} f(X_{n+1}) = \frac{1}{n + \tau_1 - 1}\Big(l_1(X_n)f(X_n + w_1) + l_2(X_n)f(X_n + w_2)\Big). \tag{10}$$

Définition 3.1 *L'***opérateur de transition** *d'un processus de Pólya, avec les notations de la définition 2.1, est l'opérateur aux différences finies Φ défini, pour toute fonction f définie sur V et à valeurs dans n'importe quel espace vectoriel réel et pour tout $v \in V$ par*

$$\Phi(f)(v) = l_1(v)\Big(f(v+w_1) - f(v)\Big) + l_2(v)\Big(f(v+w_2) - f(v)\Big).$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, on note $\gamma_{\tau_1,n}$ le polynôme à coefficients réel et à une indéterminée t

$$\begin{cases} \gamma_{\tau_1,1}(t) = 1 \ ; \\ \forall n \geq 2,\ \gamma_{\tau_1,n}(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t}{k+\tau_1-1}\right) \end{cases}$$

Ces notations et définitions permettent d'exprimer l'espérance de $f(X_n)$ pour n'importe quelle fonction.

Proposition 3.2 *Soit $(X_n)_n$ un processus de Pólya, avec les notations de la définition 2.1. Si f est une fonction définie sur V et à valeurs dans n'importe quel espace vectoriel réel, alors pour tout $n \geq 1$,*

$$Ef(X_n) = \gamma_{\tau_1,n}(\Phi)(f)(X_1).$$

Preuve. La formule (10) s'écrit $E^{\mathcal{F}_n} f(X_{n+1}) = \left(\mathrm{Id} + \dfrac{1}{n+\tau_1-1}\Phi\right)(f)(X_n)$ et on conclut par une récurrence immédiate. ■

Si f est un fonction propre de Φ associée à une valeur propre z alors $Ef(X_n) = \gamma_{\tau_1,n}(z) \times f(X_1)$ et la formule de Stirling fournit le développement

$$Ef(X_n) = \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1+z)} f(X_1) n^z \left(1 + O(1/n)\right) \tag{11}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Cela suggère naturellement de chercher à réduire l'opérateur Φ. On peut déjà procéder à l'étude en moyenne ; on fournit ensuite deux exemples de calculs de fonctions propres.

Proposition 3.3 *Si $(X_n)_n$ est un processus de Pólya, avec les notations précédentes,*

$$EX_n = (n+\tau_1-1)v_1 + n^\lambda \frac{\tau_2\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1+\lambda)} v_2 + O\left(n^{\lambda-1}\right).$$

Preuve. On prend l'espérance dans la formule (9) et on utilise le fait que u_2 est fonction propre de Φ associée à la valeur propre λ. ■

Exemple 1 : première projection

Un calcul immédiat (le faire) montre que pour tout entier $p \geq 1$,

$$\Phi\big(u_1(u_1+1)(u_1+2)\dots(u_1+p-1)\big) = pu_1(u_1+1)(u_1+2)\dots(u_1+p-1).$$

Ainsi, la fonction $Q_{p,0} = u_1(u_1+1)(u_1+2)\dots(u_1+p-1)$ est-elle fonction propre de Φ associée à la valeur propre p (la notation sera justifiée plus bas). Les puissances u_1^p se développent en fonction des $Q_{k,0}$ par le biais des nombres de Stirling de seconde espèce :

$$u_1^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \left\{ {p \atop k} \right\} Q_{k,0}. \tag{12}$$

Exemple 2 : processus triangulaires

Un processus est *triangulaire* lorsque $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui signifie que, dans la base duale de la base (l_1, l_2), son endomorphisme de remplacement a une matrice triangulaire. Quitte a permuter l_1 et l_2, on peut supposer que $a = 0$, c'est-à-dire que la matrice de A dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}.$$

On suppose que $A \neq \mathrm{Id}$, *i.e.* que $b > 0$. Alors, on peut choisir $u_2 = l_2$ et un calcul élémentaire montre que pour tout $p \geq 1$,

$$Q_{0,p} = u_2(u_2+\lambda)(u_2+2\lambda)\dots(u_2+(p-1)\lambda) \tag{13}$$

est fonction propre de Φ associée à la valeur propre $p\lambda = p(1-b)$. Si $b = 1$, le processus est déterministe ; si $b > 1$, la coordonnée $l_2(X_n)$ tend presque sûrement vers 0 (c'est un processus d'urne dont une couleur s'épuise presque sûrement). Dans ces deux derniers cas, on dira que le processus triangulaire est *dégénéré*. Lorsque $b \in]0,1[$, on dit que le processus triangulaire est *non dégénéré*.

Proposition 3.4 *(***Asymptotique en loi des processus triangulaires non dégénérés***)*
Soit $(X_n)_n$ un processus de Pólya triangulaire non dégénéré, avec les notations ci-dessus. Alors on a la convergence en loi

$$\frac{1}{n^\lambda}(X_n - nv_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Wv_2$$

ou W est la distribution sur $\mathbb{R}$, déterminée par ses moments, dont la transformée de Laplace est

$$E\left(e^{zW}\right) = \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\frac{\tau_2}{\lambda})} \sum_{p\geq 0} \frac{\Gamma(p+\frac{\tau_2}{\lambda})}{\Gamma(p\lambda+\tau_1)} \frac{\lambda^p}{p!} z^p. \tag{14}$$

Le rayon de cette dernière série entière est infini.

Preuve. La formule (9) montre que $X_n - nv_1 = u_2(X_n)v_2 + O(1)$ presque sûrement. Puisque $0 < \lambda < 1$, il suffit de montrer que $u_2(X_n)$ converge en loi vers une telle W. Puisque $Q_{0,p}$ est fonction propre de Φ associée à la valeur propre $p\lambda$, la formule (11) fournit l'asymptotique $EQ_{0,p}(X_n) \sim n^{p\lambda}Q_{0,p}(X_1)\Gamma(\tau_1)/\Gamma(p\lambda+\tau_1)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En inversant la formule (13), on obtient

$$u_2^p = \sum_{k=1}^{p} \lambda^{p-k} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} Q_{0,k} \tag{15}$$

ce qui prouve, en remarquant que $Q_{0,p}(X_1) = \lambda^p\Gamma(p+\frac{\tau_2}{\lambda})/\Gamma(\frac{\tau_2}{\lambda})$, que

$$Eu_2^p(X_n/n^\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^p \frac{\Gamma(p+\frac{\tau_2}{\lambda})}{\Gamma(\frac{\tau_2}{\lambda})} \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(p\lambda+\tau_1)}.$$

La formule de Stirling montre encore que le rayon de convergence de la série entière dont le $p^{\text{ième}}$ coefficient est ce dernier nombre divisé par $p!$ est infini. Cela prouve à la fois la convergence en loi de $u_2(X_n/n^\lambda)$ vers une distribution W, le fait que W soit déterminée par ses moments et la formule (14). ■

On verra plus loin que cette convergence est presque sûre dans le cas où $1/2 < \lambda < 1$, c'est-à-dire lorsque $0 < b < 1/2$.

Exemple 3 : cas des urnes de Pólya

C'est le cas où $a = b = 0$, c'est-à-dire le cas $A = \mathrm{Id}$. On a posé $(u_1, u_2) = (l_1, l_2)$, base duale de $(v_1, v_2) = (w_1, w_2)$. On a un calcul explicite d'une base de polynômes propres : un notant $x^{[0]} = 1$ et $x^{[p]} = x(x+1)\dots(x+p-1)$, alors pour tous $p_1, p_1 \geq 0$,

$$\Phi\left(u_1^{[p_1]}u_2^{[p_2]}\right) = (p_1+p_2)u_1^{[p_1]}u_2^{[p_2]}.$$

Ainsi, les moments joints de $u_1(X_n/n)$ et $u_2(X_n/n)$ convergent :

$$Eu_1^{[p_1]}u_2^{[p_2]}(X_n/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(\tau_1+\tau_2)}{\Gamma(\tau_1+\tau_2+p_1+p_2)} \frac{\Gamma(\tau_1+p_1)}{\Gamma(\tau_1)} \frac{\Gamma(\tau_2+p_2)}{\Gamma(\tau_2)}$$

où, ici et ici seulement, on a noté $\tau_1 = l_1(X_1)$ et $\tau_2 = l_2(X_1)$. On reconnaît les moments d'une distribution de Dirichlet de paramètres τ_1 et τ_2, dont la densité sur le simplexe $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{\Gamma(\tau_1+\tau_2)}{\Gamma(\tau_1)\Gamma(\tau_2)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2},$$

déterminée par ses moments. Cela montre la convergence en loi de X_n/n vers cette distribution de Dirichlet. On verra plus bas que cette convergence est presque sûre.

4 Polynômes réduits

On considère un processus de Pólya de dimension deux. On voit d'un coup d'œil que l'opérateur de transition Φ transforme tout polynôme non nul à deux variables en un polynôme de degré inférieur ou égal (il suffit de le voir sur les monômes). Plus précisément, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\mathbf{u}^\alpha = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}, \quad \lambda_\alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2 \text{ et } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Les $(\mathbf{u}^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^2}$ forment une base de polynômes à deux variables et à coefficients réels. On considère l'ordre degré-lexicographique inverse sur les couples d'entiers ; pour cet ordre,

$$(1,0) < (0,1) < (2,0) < (1,1) < (0,2) < (3,0) < (2,1) < (1,2) < (0,3) < (4,0)\ldots$$

Proposition 4.1 *Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$,*

$$\Phi(\mathbf{u}^\alpha) - \lambda_\alpha\, \mathbf{u}^\alpha \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ \beta < \alpha\}.$$

Preuve. Par la formule de Taylor, $\Phi(\mathbf{u}^\alpha)(v) - \mathrm{D}(\mathbf{u}^\alpha)_v.Av \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ |\beta| < |\alpha|\}$. Puisque $u_1 \circ A = u_1$ et $u_2 \circ A = \lambda u_2$, cela suffit à montrer le résultat. ∎

En particulier, les espaces de polynômes $S_\alpha = \mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ \beta \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$ forment une filtration de l'espace des polynômes à deux variables en sous-espaces Φ-stables. La proposition montre que les valeurs propres de Φ sur l'espace des polynômes sont les réels λ_α, $\alpha \in \mathbb{N}^2$ puisque les matrices des restrictions de Φ aux S_α dans la base $(\mathbf{u}^\alpha)_\alpha$ sont triangulaires avec ces nombres sur la diagonale.

Si z est une valeur propre de Φ, on note $\ker(\Phi - z)^\infty$ le sous-espace caractéristique de Φ associé à z :

$$\ker(\Phi - z)^\infty = \bigcup_{k\geq 0} \ker(\Phi - z)^k.$$

L'espace des polynômes est la somme directe de ces sous-espaces.

Définition 4.2 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, le* polynôme réduit *de rang α est le projeté de $\mathbf{u}^\alpha$ sur* $\ker(\Phi - \lambda_\alpha)^\infty$*, parallèlement à* $\bigoplus_{z\neq\lambda_\alpha} \ker(\Phi - z)^\infty$*. On le note Q_α.*

Ces polynômes réduits vérifient $Q_{(0,0)} = 1$, $Q_{(1,0)} = u_1$, $Q_{(0,1)} = u_2$; plus généralement, comme il a été vu plus haut, pour tout $p \geq 1$, $Q_{(p,0)} = u_1^{[p]}$. En outre, pour tout α, $(Q_\beta)_{\beta\leq\alpha}$ est une base de $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ \beta \leq \alpha\}$; pour tout $z \in \mathbb{R}$, $(Q_\alpha)_{z=\lambda_\alpha}$ est une base de $\ker(\Phi - z)^\infty$; $Q_\alpha - \mathbf{u}^\alpha \in \mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta < \alpha,\ \lambda_\beta \neq \lambda_\alpha\}$ et $\Phi(Q_\alpha) - \lambda_\alpha Q_\alpha \in \mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta < \alpha,\ \lambda_\beta = \lambda_\alpha\}$. On peut donner des Q_α une définition récursive. Leurs propriétés garantissent l'existence d'une unique famille $(q_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ de nombres réels qui vérifient

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^2,\ \ \mathbf{u}^\alpha = Q_\alpha + \sum_{\beta<\alpha,\ \lambda_\beta\neq\lambda_\alpha} q_{\alpha,\beta} Q_\beta. \tag{16}$$

Les formules (12) et (15) sont des exemples de tels développements.

Comme les restrictions de Φ aux espaces de dimension finies de polynômes ne sont pas toutes diagonalisables, les Q_α ne sont pas toujours des vecteurs propres de Φ. Pour chaque α, on note ν_α l'indice de nilpotence de Q_α pour Φ :

$$\nu_\alpha = \max\{p \geq 0,\ (\Phi - \lambda_\alpha)^p(Q_\alpha) \neq 0\}.$$

Ainsi, la restriction de Φ à l'espace caractéristique $\ker(\Phi - \lambda_\alpha)^\infty \cap \mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta \leq \alpha\}$ est-elle somme de $\lambda_\alpha.\mathrm{Id}$ et d'un endomorphisme nilpotent d'indice ν_α (*i.e.* dont la puissance $\nu_\alpha^{\text{ième}}$ est la plus grande puissance non nulle).

5 Asymptotique des moments

Proposition 5.1 (Asymptotique des moments réduits) *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$.*

1- Si $\nu_\alpha = 0$, i.e. *si Q_α est un vecteur propre de Φ, alors, quand n tend vers $+\infty$,*

$$EQ_\alpha(X_n) = n^{\lambda_\alpha}\frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1+\lambda_\alpha)}Q_\alpha(X_1) + O(n^{\lambda_\alpha - 1}).$$

2- Si $\nu_\alpha \geq 1$, alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} EQ_\alpha(X_n) &= \frac{n^{\lambda_\alpha}\log^{\nu_\alpha} n}{\nu_\alpha!}\frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1+\lambda_\alpha)}(\Phi-\lambda_\alpha)^{\nu_\alpha}(Q_\alpha)(X_1) \\ &\qquad + O(n^{\lambda_\alpha}\log^{\nu_\alpha - 1} n). \end{aligned}$$

Preuve. Si Q_α est propre, cela résulte de (11). Sinon, la restriction de Φ à son sous-espace caractéristique associé à λ_α dans $\mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta \leq \alpha\}$ est une somme $\lambda_\alpha \mathrm{Id} + N$ où N est nilpotent d'indice ν_α. Alors, le développement de Taylor de $\gamma_{\tau_1,n}(\lambda_\alpha \mathrm{Id} + N)$ amène à la somme

$$EQ_\alpha(X_n) = \sum_{0\leq k\leq \nu_\alpha}\frac{1}{k!}\gamma_{\tau_1,n}^{(k)}(\lambda_\alpha)N^k(Q_\alpha)(X_1).$$

En outre, en calculant la dérivée logarithmique de $\gamma_{\tau_1,n}$, on montre par une récurrence immédiate avec la formule de Stirling que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\gamma_{\tau_1,n}^{(k)}(\lambda_\alpha) = n^{\lambda_\alpha}\log^k n\frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1+\lambda_\alpha)} + O\left(n^{\lambda_\alpha}\log^{k-1} n\right)$$

quand n tend vers $+\infty$. Cela démontre le résultat. ∎

Pour évaluer l'asymptotique des moments principaux $E\,\mathbf{u}^\alpha(X_n)$ à partir de la formule (16), se pose la double question :

i) quels nombres $q_{\alpha,\beta}$ s'annulent-ils ?

ii) Pour un α donné, parmi les $\beta < \alpha$ tels que $q_{\alpha,\beta} \neq 0$, pour lesquels λ_β est-il maximal ? La réponse à cette question passe par un raffinement de la formule (16) par l'intermédiaire d'un cône polyédral rationnel Σ dans l'espace des exposants α.

Définition 5.2 *On note Σ le cône de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\Sigma = \mathbb{R}_+(-1,2) + \mathbb{R}_+(2,-1) = \{(x,y),\ 2x+y \geq 0,\ x+2y \geq 0\}.$$

On note également $\alpha - \Sigma = \{\alpha - \sigma,\ \sigma \in \Sigma\}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$.

Théorème 5.3 *Soit $(X_n)_n$ un processus de Pólya de dimension deux avec les notations précédentes et soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$.*

1- Le sous-espace $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ \beta \in \alpha - \Sigma\}$ *est Φ-stable et égale* $\mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta \in \alpha - \Sigma\}$.

2- On a la formule

$$\mathbf{u}^\alpha = Q_\alpha + \sum_{\beta \in \alpha - \Sigma,\ \lambda_\beta \neq \lambda_\alpha} q_{\alpha,\beta} Q_\beta. \tag{17}$$

Preuve. On note $\mathcal{E}_\alpha = \mathrm{Vect}\{\mathbf{u}^\beta,\ \beta \in \alpha - \Sigma\}$.

1- Il suffit de montrer que pour tout $\beta \in \alpha - \Sigma$, $\Phi(\mathbf{u}^\beta) \in \mathcal{E}_\alpha$. Soit $\beta = \alpha - \sigma \in \mathcal{E}_\alpha$. Par la formule de Taylor, $\Phi(\mathbf{u}^\beta) - \lambda_\beta \mathbf{u}^\beta$ est combinaison linéaire de polynômes $\mathbf{u}^\gamma$ où γ est de la forme $\gamma = \beta - \eta + \delta$ avec $\eta \in \mathbb{N}^2$, $|\eta| \geq 2$ et $\delta \in \{(0,1),(1,0)\}$ – le η provient des dérivations d'ordre ≥ 2 et le δ vient du développement de l_1 et l_2 dans la base (u_1, u_2). En écrivant $\alpha - \gamma = \sigma + \eta - \delta$ et en utilisant les équations des faces de Σ, on montre que tous ces γ sont dans $\alpha - \Sigma$, ce qui montre le résultat de stabilité.

Par unicité de la décomposition en sous-espaces caractéristiques, puisque $\mathbf{u}^\beta \in \mathcal{E}_\alpha$ et que $\mathcal{E}_\alpha$ est Φ-stable, le projeté de $\mathbf{u}^\beta$ sur l'espace caractéristique de la restriction de Φ à $\mathcal{E}_\alpha$ est également Q_β. Ainsi, $\mathrm{Vect}\{Q_\beta,\ \beta \in \alpha - \Sigma\}$ est-il un sous-espace de $\mathcal{E}_\alpha$. Comme ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension finie, ils sont égaux.

2- D'après les propriétés des polynômes réduits citées après leur définition, $Q_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \in \mathrm{Vect}\{Q_\beta, \beta < \alpha, \lambda_\beta \neq \lambda_\alpha\} \cap \mathcal{E}_\alpha$, ce qui démontre la formule (17). ■

Théorème 5.4 (Asymptotique des moments) *Soit $(X_n)_n$ un processus de Pólya de dimension deux avec les notations précédentes.*

1- Si $\lambda > 1/2$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$,

$$E\,\mathbf{u}^\alpha(X_n) = n^{\lambda_\alpha} \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 + \lambda_\alpha)} Q_\alpha(X_1) + o\left(n^{\lambda_\alpha}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2- Si $\lambda \leq 1/2$, alors pour tout entier naturel p, il existe un entier $\nu_p \geq 0$ tel que

$$Eu_2^p(X_n) \in O\left(n^{p/2} \log^{\nu_p} n\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Preuve. 1- Si $\lambda > 1/2$, on montre que c'est l'asymptotique de $EQ_\alpha(X_n)$ qui l'emporte dans la formule (17) en montrant que pour tout $\beta \in \alpha - \Sigma \setminus \{\alpha\}$, $\lambda_\beta < \lambda_\alpha$ et en utilisant l'asymptotique des moments réduits. Soit $\beta \in \alpha - \Sigma$; soit alors $\sigma = \alpha - \beta \in \Sigma$. Alors, $\lambda_\beta = \lambda_\alpha - (\sigma_1 + \lambda\sigma_2)$ et $\sigma_1 + \lambda\sigma_2 \geq \sigma_1 + \sigma_2/2 \geq 0$ puisque $\sigma \in \Sigma$. En outre, la première inégalité est stricte sauf si $\sigma_2 = 0$, ce qui impose que $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$ seulement si $\sigma = 0$, *i.e.* si $\beta = \alpha$.

2- Il suffit de montrer que si $\alpha = (0, p)$ et si $\beta \in (\alpha - \Sigma) \cap_g N^2$, alors $\lambda_\beta \leq p/2$. Soit $\sigma = \alpha - \beta \in \Sigma$. Alors, $\lambda_\beta = \lambda(p - \sigma_2) - \sigma_1 \leq (p - \sigma_2)/2 - \sigma_1$ puisque $\beta_2 = p - \sigma_2 \geq 0$. Ainsi, $\lambda_\beta \leq p/2 - (\sigma_2/2 + \sigma_1) \leq p/2$ puisque $\sigma \in \Sigma$ (voir les équations de Σ). ■

6 Asymptotique des grands processus

La formule presque sûre (9) montre que l'étude de la projection $\pi_2(X_n) = u_2(X_n)v_2$, ou même de la variable aléatoire $u_2(X_n)$ suffit pour atteindre l'asymptotique du processus $X_n = (n + \tau_1 - 1)v_1 + u_2(X_n)v_2$ (la projection $\pi_1(X_n) = u_1(X_n)v_1 = (n + \tau_1 - 1)v_1$ est déterministe à cause de (5)).

Définition 6.1 *Avec les notations qui précèdent, un processus de Pólya de dimension deux est dit* **grand** *lorsque* $1/2 < \lambda \leq 1$. *Dans le cas contraire, on dira qu'il est* **petit**.

Soit $(X_n)_n$ un grand processus de Pólya. Le calcul de l'espérance conditionnelle

$$E^{\mathcal{F}_n} u_2(X_{n+1}) = (\mathrm{Id} + \frac{\Phi}{n + \tau_1 - 1})(u_2)(X_n) = (1 + \frac{\lambda}{n + \tau_1 - 1}) \times u_2(X_n)$$

montre que le processus $(M_n)_n$ défini par

$$M_n = \frac{1}{\gamma_{\tau_1,n}(\lambda)} u_2(X_n)$$

est une martingale d'espérance $u_2(X_1) = \tau_2$. On notera que cette normalisation est toujours définie dès lors que le processus est grand, car, puisque $\tau_1 > 0$, les polynômes $\gamma_{\tau_1,n}$ ne s'annulent pas en λ.

Théorème 6.2 (Asymptotique des grands processus de Pólya de dimension 2) *Soit $(X_n)_n$ un grand processus de Pólya de dimension 2, avec les notations précédentes.*

1- Il existe une variable aléatoire réelle W telle que

$$X_n = nv_1 + n^\lambda W v_2 + o(n^\lambda),$$

le o étant presque sûr et dans tous les espaces L^p, $p \geq 1$.

2- Pour tout entier $p \geq 1$, le $p^{\text{ième}}$ moment de W est donné par la formule

$$EW^p = \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 + p\lambda)} Q_{(0,p)}(X_1).$$

PREUVE. *1-* Connaissant l'asymptotique de $\gamma_{\tau_1,n}(\lambda)$ fournie par la formule de Stirling, il suffit, pour montrer *1-*, de montrer que la martingale $(M_n)_n$ est bornée pour toute norme L^p, $p \geq 1$. Le *1-* du théorème de l'asymptotique des moments montre précisément que, lorsque le processus est grand,

$$Eu_2^p(X_n) = n^{p\lambda} \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 + p\lambda)} Q_{(0,p)}(X_1) + o\left(n^{p\lambda}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, la martingale $(M_n)_n$ est-elle convergente dans tous les L^p, $p \geq 1$ et presque sûrement. On note, pour achever la preuve du résultat,

$$W = \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 + \lambda)} \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_2(X_n)}{n^\lambda}.$$

2- Puisque la convegence est dans tous les L^p, $p \geq 1$, la variable W a un $p^{\text{ième}}$ moment qui est la limite de $Eu_2^p(X_n/n^\lambda)$. ■

7 Questions ouvertes

Détermination de la loi de W ?
Densité ?
Support ?
Est-elle déterminée par ses moments, indivisible ?
Mêmes questions en dimension finie quelconque.
Généraliser un théorème de convergence avec moments des lois limites pour des processus de dimension infinie ?
Etc.

Références bibliographiques

[1] K. B. Athreya, S. Karlin *Embedding of urn schemes into continuous time Markov branching processes and related limit theorems.* Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1801–1817.

[2] A. Bagchi, A. K. Pal *Asymptotic normality in the generalized Pólya-Eggenberger urn model, with an application to computer data structures.* SIAM Journal on Alegebraic and Discrete Methods, 6 **3** (1985), 394–405.

[3] P. Billingsley *Probability and measure.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, second edition, John Wiley & Sons, 1986.

[4] B. Chauvin, N. Pouyanne *m-ary search trees when $m \geq 27$: a strong asymptotics for the space requirements.* Random Structures and Algorithms **24** (2004), 133–154.

[5] H.-H. Chern, H.-K. Hwang *Phase changes in random m-ary search trees and generalized quicksort.* Random Structures and Algorithms **19** (2001), 316–358.

[6] H.-H. Chern, M. Fuchs, H.-K. Hwang *Phase changes in random point quadtrees.* Submitted, 50 pages. Disponible à l'adresse http://algo.stat.sinica.edu.tw/HK/

[7] F. Eggenberger, G. Pólya *Ueber die Statistik verketter Vorgänge.* Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik und Mechanik **1** (1923), 279–289.

[8] J.A. Fill, N. Kapur *The space requirements of m-ary search trees: distributional asymptotics for $m \geq 27$.* Prépublication, 10 pages, disponible à l'adresse http://www.mts.jhu.edu/∼fill/.

[9] P. Flajolet, J. Gabarró, H. Pekari *Analytic urns.* The Annals of Probability, **33**(3) (2005), 1200–1233.

[10] B. Friedman *A simple urn model.* Comm. Pure Appl. Math., **2** (1949), 59–70.

[11] R. Gouet *Strong Convergence of Proportions in a Multicolor Pólya urn.* Journal of Applied Probability **34** (1997), 426–435.

[12] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik *Concrete Mathematics,* second edition, Addison-Wesley, 1995.

[13] P. Hall, C.C. Heyde *Martingale Limit Theory and Its Applications,* Academic Press, 1980.

[14] J. Jabbour-Hattab *Martingales and large deviations for binary search trees.* Random Structures and Algorithms, **19**(2) (2001), 112–127.

[15] S. Janson *Functional limit theorem for multitype branching processes and generalized Pólya urns.* Stochastic Processes and Applications, **110** (2004), 177–245.

[16] S. Janson *Limit theorems for triangular urn schemes.* Probability Theory and Related Fields, **134** (2005), 417–452.

[17] S. Janson *Congruence properties of depths in some random trees (2005).* Alea Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., A paraître

Disponible à l'adresse arXiv:math.PR/0509471

[18] N. L. Johnson, S. Kotz *Urn models and their application,* John Wiley, 1977.

[19] D.E. Knuth *The art of computer programming,* vol. 3, Addison-Wesley, 1973.

[20] W. Lew et H. M. Mahmoud *The joint distribution of elastic buckets in multiway search trees.* SIAM Journal on Computing **23**(5) (1994), 1050–1074.

[21] H.M. Mahmoud *Evolution of random search trees.* Wiley, New-York, 1992.

[22] H. M. Mahmoud et B. Pittel *Analysis of the space of search trees under the random insertion algorithm.* Journal of Algorithms **10** (1989), 52–75.

[23] H. M. Mahmoud et R. T. Smythe *Probabilistic analysis of bucket recursive trees.* Theoretical Computer Science **144** (1995), 180–205.

[24] R. Neininger et L. Rueschendorf *A general limit theorem for recursive algorithms and combinatorial structures.* The Annals of Applied Probability **14** (2004) no. 1, 378–418.

[25] J. Neveu *Arbres et processus de Galton-Watson.* Annales de l'Institut Henri Poincaré **22**(2) (1986), 199–207.

[26] G. Pólya *Sur quelques points de la théorie des probabilités.* Annales de l'Institut Poincaré **1** (1930), 117–161.

[27] N. Pouyanne *An algebraic approach to Pólya processes.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, à paraître (2006), 44 pages

[28] N. Pouyanne *Classification of large Pólya-Eggenberger urns with regard to their asymptotics.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **AD** (2005), 275–286.

[29] V. Puyhaubert *Modèles d'urnes et phénomènes de seuils en combinatoire analytique.* Thèse de l'Ecole Polytechnique (2005).

Disponible à l'adresse http://algo.inria.fr/puyhaubert/

[30] R. T. Smythe *Central limit theorems for urn models.* Stochastic Processes and their Applications **65** (1996), 115–137.

[31] B. Ycart, R. Abraham, J. S. Dhersin *Strong convergence for urn models with reducible replacement policy.* Prépublication soumise (2005).