UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire)

Cours en bref

Introduction : paradoxe des anniversaires ; compter les arbres binaires planaires et enracinés 1, 2, 3, 4 nœuds internes, noter la série génératrice ordinaire, décomposer la classe combinatoire, équation fonctionnelle, forme close de la série $C(T) = \frac{1-\sqrt{1-4T}}{2T}$, forme close des nombres de Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (sans preuve, les premiers sont 1, 2, 5, 14) ; un exemple de coloriage (existence d'un chemin partant du centre d'un cube subdivisé en 27) ?

Table des matières

1 Dénombrements **3**
- 1.1 Eléments sur les cardinaux . . . 3
- 1.2 Premiers dénombrements . . . 4
- 1.3 Les grands classiques . . . 6
  - 1.3.1 Nombres d'applications . . . 6
  - 1.3.2 Nombre de parties d'un ensemble fini . . . 6
  - 1.3.3 Nombre d'injections (arrangements) . . . 6
  - 1.3.4 Nombre de parties de cardinal donné (combinaisons) . . . 7
- 1.4 Permutations d'un ensemble fini . . . 8
  - 1.4.1 Décomposition en produit de cycles à supports disjoints . . . 8
  - 1.4.2 Signature d'une permutation . . . 9
  - 1.4.3 Groupe alterné . . . 9
- 1.5 Encore deux grands classiques (Stirling) . . . 9

2 (Autres) exemples de méthode bijective **10**
- 2.1 Monômes . . . 10
- 2.2 Arbres et chemins de Dyck . . . 11
- 2.3 Permutations zig-zag et arbres décroissants . . . 12

3 Formules d'inversion **12**
- 3.1 Coefficients du binôme . . . 12
- 3.2 Sommation sur les parties . . . 13
- 3.3 Fonction de Möbius . . . 14

4 Formules des classes (pas en 2009/2010) **15**

5 Séries formelles, fonctions génératrices **15**
5.1 Algèbre des séries formelles 15
5.2 Composée de séries formelles 17
5.3 Inversion d'une série formelle 17
5.4 Séries formelles usuelles 18
5.5 Récurrences linéaires et fractions rationnelles 18

6 Eléments de méthode symbolique et de combinatoire analytique (pas en 2009/2010) **19**
6.1 Séries génératrices d'une classe combinatoire 19
6.2 Analyse des singularités, transfert 19

1 Dénombrements

1.1 Eléments sur les cardinaux

Définition : deux ensembles sont *équipotents* lorsqu'ils sont en bijection ; réflexivité, symétrie et transitivité (rappels sur injection, surjection, bijection s'il faut). Définition d'une ensemble infini (équipotent à une partie propre). Un ensemble est *dénombrable* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$; un ensemble a le *cardinal du continu* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{R}$.
Exercice : soit $Y \subseteq X$; si Y est infini, alors X est infini. Enoncer la contraposée.
Exemples : 1- $\mathbb{N}$ est infini ($n \mapsto n+1$ est bijective, réciproque est $n \mapsto n-1$).
2- $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents (bijection $x \mapsto 1/(1+e^{-x})$, trois preuves : par l'analyse, strictement croissante (dérivée) donc injective, limites et théorème des valeurs intermédiaires donc surjective ; preuve par le calcul de l'injectivité et de la surjectivité ; réciproque explicite donnée par la résolution de l'équation posée par la question de la surjectivité).
3- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents (dessiner d'abord, puis expliciter $n \mapsto n/2$ si n est pair, $n \mapsto -(n+1)/2$ si n est impair ; réciproque explicite $n \mapsto 2n$ si $n \geq 0$ et $n \mapsto -1-2n$ si $n \leq 1$). Dessin et calcul : deux niveaux de preuve. Commenter.
4- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (dessin sans expliciter la bijection correspondante).
5- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (argument de la diagonale de Cantor qui montre que $]0,1[$ n'est pas dénombrable : si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une partie dénombrable de $]0,1[$, soit $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$ le développement décimal propre de x_n ; on construit le nombre $x = 0, b_1b_2\ldots$ où les b_n sont ainsi définis : $b_n = 1$ si $a_{nn} \neq 1$ et $b_n = 2$ si $a_{nn} = 1$. Alors, le nombre non décimal x n'égale aucun x_n puisque, pour tout n, la $n^{\text{ième}}$ décimale de x n'est pas celle de x_n. En passant, si x n'est pas décimal et y réel, il suffit que x et y diffèrent d'une décimale pour qu'ils soient distincts).
Exercices : 1- si a, b, c, d sont des réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $[a,b]$ et $[c,d]$ sont équipotents. De même, $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ et $[c,d] \cap \mathbb{Q}$ sont équipotents.
2- $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont équipotents.

Proposition 1 *Soient X, Y, Z des ensembles tels que*
1- il existe des applications injectives $X \to Y$ et $Y \to Z$;
2- X et Z sont équipotents.
Alors, X, Y et Z sont équipotents.

PREUVE. Admis (théorie des ensembles). ■

Exemples : 1- $\mathbb{Q}$ est dénombrable (en effet, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $r = N_r/D_r \to (N_r, D_r)$ est une injection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2$ si N_r/D_r est la fraction irréductible égale à r (on met les signes au numérateur, par exemple)).
2- *Hypothèse du continu* : si X est un ensemble tel que $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, alors X est dénombrable ou X a le cardinal du continu. Cette assertion est indécidable dans la théorie “ordinaire” des ensembles (logique).

Cardinaux des ensembles finis

Proposition 2 *Si X est un ensemble fini non vide, il existe un unique entier naturel n tel que X et $\{1, \dots, n\}$ soient équipotents.*

Preuve. Admis, vient de la définition des entiers naturels, logique et théorie des ensembles. ■

Définition : le *cardinal* d'un ensemble fini non vide X est l'unique entier $n \geq 1$ tel que X et $\{1, \dots, n\}$ soient équipotents. On note $\#(X)$ ou $\mathrm{Card}(X)$ ou $|X|$. Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Proposition 3 (Propriétés élémentaires des cardinaux finis)
1- (Principe additif) *Si A et B sont des parties disjointes d'un même ensemble fini, $A \cup B$ est fini et $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.*
2- (Principe multiplicatif) *Si X et Y sont des ensembles finis, $X \times Y$ est fini et $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$.*
3- S'il existe une injection $X \to Y$ et si Y est fini, alors X est fini et $\#(X) \leq \#(Y)$.
4- S'il existe une surjection $X \to Y$ et si X est fini, alors Y est fini et $\#(X) \geq \#(Y)$.

Preuve. Admis. Ces propriétés viennent des définitions des entiers naturels, de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, de l'addition et de la multiplication des entiers. Elles sont du ressort de la logique et théorie des ensembles. ■

Proposition 4 *Soient X et Y des ensembles* finis *de même cardinal et $f : X \to Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes : f est injective ; f est surjective ; f est bijective.*

Preuve. Si f est injective, elle définit une bijection de X sur $f(X)$; ainsi, $f(X)$ est une partie de Y dont le cardinal égale celui de Y, d'où $Y = f(X)$ puisque Y est fini. Si f est surjective, soit $y \in Y$; alors, f définit encore une surjection de $X \setminus f^{-1}(y)$ sur $Y \setminus \{y\}$. Ainsi, $\#X - \#f^{-1}(y) \geq \#Y - 1$, qui entraîne que $\#f^{-1}(y) \leq 1$. Sachant que f est surjective, cela impose que $f^{-1}(y)$ est un singleton. ■

Exemple : si m et n sont des nombres entiers naturels étrangers, l'homomorphisme de groupes additifs $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ induit par le produit des surjections canoniques est injectif (lemme d'Euclide), donc bijectif. C'est une preuve du théorème chinois.

1.2 Premiers dénombrements

• Par récurrence, le cardinal d'une union disjointe finie d'ensembles finis est la somme des cardinaux. Application fréquente : lorsqu'un ensemble fini est muni d'une relation d'équivalence, son cardinal est la somme des cardinaux des orbites (*i.e.* des classes d'équivalence).

• Par récurrence, le cardinal d'un produit fini d'ensembles finis est le produit des cardinaux. Exemple : le nombre de diviseurs positifs de $p_1^{a_1}\dots p_n^{a_m}$ est $\prod_k(a_k+1)$ (on utilise l'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers).

• Si A et B sont des parties d'un même ensemble, alors $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$ (dû au fait que $A\cup B$ est l'union disjointe de A et de $B\setminus A = B\setminus A\cap B$).

Proposition 5 (formule du crible, ou d'inclusion-exclusion) *Soient X un ensemble, K un ensemble fini et $(A_k)_{k\in K}$ un famille de parties de X. Si $J\subseteq K$, on note $A_J=\bigcap_{j\in J}A_j$ si $J\neq\emptyset$. Alors,*

$$|\bigcup_{k\in K}A_k| = \sum_{J\subseteq K,\ J\neq\emptyset}(-1)^{|J|-1}|A_J| = \sum_k|A_k| - \sum_{\{k_1,k_2\},k_1\neq k_2}|A_{k_1}\cap A_{k_2}|+\cdots$$

Preuve. Par récurrence sur le cardinal de K. Si $|K|=2$, c'est la formule ci-dessus. Si $|K|\geq 2$, on isole un élément $\kappa\in K$, on note $K'=K\setminus\{\kappa\}$ et on applique la formule du cardinal de l'union de deux parties : $|\bigcup_K A_k| = |A_\kappa\cup\bigcup_{K'}A_k| = |A_\kappa|+|\bigcup_{K'}A_k|-|A_\kappa\cap\bigcup_{K'}A_k|$. Par récurrence (deux fois), ce nombre égale $|A_\kappa|+\sum_{\emptyset\neq J\subseteq K'}(-1)^{|J|-1}|A_J| - |\bigcup_{k\in K'}A_\kappa\cap A_k| = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq K'}(-1)^{|J|-1}|A_J| - \sum_{\kappa\in J\subseteq K}(-1)^{|J|}|A_J| = \sum_{J\subseteq K,\ J\neq\emptyset}(-1)^{|J|-1}|A_J|$. ∎

Exemple : combien de nombres ≤ 60 sont-ils pairs ou divisibles par 3 ?
Exercices : 1- combien d'entiers ≤ 300 ne sont-ils multiples de 2 ni de 3 ni de 7 ?
2- En passant par les complémentaires, écrire et prouver une formule d'inclusion-exclusion pour le cardinal d'une intersection.
3- Crible d'Erathostène (Comtet p.178) :

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n}) = n-1-\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{p_k}\right\rfloor + \sum_{1\leq k_1<k_2\leq\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{p_{k_1}p_{k_2}}\right\rfloor-\cdots+(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{p_1\dots p_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}\right\rfloor.$$

• Le cardinal d'un ensemble fini muni d'une relation d'équivalence est la somme des cardinaux des orbites (partition et cardinal d'une union disjointe). *Théorème des bergers* : si X est fini et si les fibres de $X\to Y$ ont toutes le même cardinal c, alors $\#(X)=c\#(Y)$ (comme l'application est surjective, les fibres forment une partition de X qui est celle de la relation d'équivalence "avoir même image" ; $\#X=\sum_{y\in Y}\#f^{-1}(y)=c\#Y$). De nombreuses application en théorie des groupes finis.

• Coincements d'entiers ou principe des tiroirs (de Dirichlet) : si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition d'un ensemble fini X et si $\#X\geq n+1$, alors il existe $k\in\{1,\dots,n\}$ tel que $\#A_k\geq 2$. Preuve : les A_k sont non vides ; si tous sont des singletons, X a n éléments. Exemple : si l'on prend $n+1$ entiers, il en existe deux dont la différence est un multiple de n (il n'y a que n restes modulo n).

1.3 Les grands classiques

1.3.1 Nombres d'applications

On note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

Lemme 1 *si $\varphi : X \to \{1, \ldots, p\}$ et $\psi : Y \to \{1, \ldots, n\}$ sont des bijections, l'application $f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une bijection $\mathcal{F}(X, Y) \to \mathcal{F}(\{1, \ldots, p\}, \{1, \ldots, n\})$.*

Preuve. Expliciter la réciproque. ■

Proposition 6 *Si X et Y sont des ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n, l'ensemble des applications de X dans Y est un ensemble fini de cardinal n^p.*

Preuve. Le prouver pour $X = E_p := \{1, \ldots, p\}$ et $Y = E_n$ suffit à cause du lemme. Première approche en termes de choix pour l'image de 1, de 2, *etc* en invoquant le principe multiplicatif. On le montre avec rigueur (c'est pas tous les jours fête). On note $a_{p,n}$ le cardinal de $\mathcal{F}(E_p, E_n)$; pour $p = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}(E_1, E_n) \to E_n$, $f \mapsto f(1)$ est une bijection (exo) donc $a_{1,n} = n$. Si $p \geq 2$, $\mathcal{F}(E_p, E_n) \to \mathcal{F}(E_{p-1}, E_n) \times E_n$, $f \mapsto (f_{|E_{p-1}}, f(p))$ est une bijection (exo, elle est injective et surjective). On en déduit que $a_{p,n} = na_{p-1,n}$ pour tout $p \geq 2$ et $n \geq 1$. Par récurrence sur p, on en déduit que $a_{p,n} = n^p$ pour tout $n \geq 1$. ■

Au delà de cette rigueur, sur le fond, une application de E_p dans E_n est un p-uplet d'éléments de E_n, d'où le résultat *via* le cardinal d'un produit. Ce dernier type de point de vue nous suffira souvent.

1.3.2 Nombre de parties d'un ensemble fini

Proposition 7 *Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est 2^n.*

Preuve. Voir une partie comme une application de l'ensemble dans $\{0, 1\}$ (sa fonction caractéristique). ■

En passant, le nombre de parties d'un ensemble X n'est jamais équipotent à X. En effet, si $f : X \to \mathcal{P}(X)$ est une application, soit $A = \{x \in X,\ x \notin f(x)\}$. Alors, A n'est pas dans l'image de f (si $A = f(x)$, alors il est faux que $x \in A$ et que $x \notin A$) : f n'est pas bijective. Cela vaut aussi pour les ensembles infinis et démontre, un ensemble étant donné, l'existence d'un ensemble dont le cardinal est strictement supérieur.

1.3.3 Nombre d'injections (arrangements)

La donnée d'une injection de E_p dans E_n est la donnée d'un *arrangement*, c'est-à-dire d'un p-uplet d'éléments distincts de E_n (bijection entre ces deux ensembles).

Proposition 8 *Si X et Y sont des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n, l'ensemble des injections de X dans Y est un ensemble fini de cardinal $n(n-1)\dots(n-p+1)$.*

Preuve. Là encore, seuls les cardinaux de X et Y comptent (exo). Si $p \geq n+1$, ce nombre est nul (déjà vu) ; si $p \leq n$, ce nombre égale $n!/(n-p)!$ (avec la convention $0! = 1$). Preuve par formule récursive : on note $i_{p,n}$ le nombre d'injections de E_p dans E_n, que l'on considère comme des arrangements. Ce nombre est le cardinal de l'ensemble $A_{p,n}$ des arrangements de p éléments de E_n. On considère l'application $A_{p,n} \to A_{p-1,n}$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1})$. Elle est surjective, et les fibres ont toutes $n-p+1$ éléments. D'après le théorème des bergers, cela montre que $i_{p,n} = (n-p+1)i_{p-1,n}$. Comme par ailleurs $i_{1,n} = n$, on conclut par récurrence. ■

A retenir : un raisonnement sur les n-uplets montre la formule directement en invoquant le principe multiplicatif ; une preuve plus formelle, qui explicite en un sens le raisonnement ci-dessus, se fait à partir d'une formule récursive, elle-même issue d'un argument ensembliste.

Corollaire 1 *Le cardinal du groupe $\mathfrak{S}_X$ des permutations d'un ensemble X de cardinal n est $n!$.*

1.3.4 Nombre de parties de cardinal donné (combinaisons)

Proposition 9 *Si $0 \leq p \leq n$, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est le* coefficient binomial

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

Si $p \geq n+1$, ce nombre est nul. Sinon, il vaut $n!/(n-p)!p!$.

Preuve. soit X un ensemble fini de cardinal n ; la restriction de l'application $X^p \to \mathcal{P}(X)$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \{x_1, \dots, x_p\}$ aux arrangements est une surjection sur les parties à p éléments, dont les fibres sont toutes de cardinal $p!$ (permutations de p éléments). On conclut avec le théorème des bergers. ■

Autre vision : si $X \neq \emptyset$, on isole un élément de X et on scinde les cas selon qu'une partie contient ou non cet élément. On obtient la formule récursive : si $1 \leq p \leq n$, alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

qui permet une autre preuve de la formule, par récurrence. Triangle de Pascal.
Exercice : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et interprétation combinatoire.

Formule du binôme. Preuve formelle par récurrence sur l'exposant. Interprétation en termes de choix des facteurs dans le développement du produit.

Formule du multinôme (identité polynomiale) :

$$(X_1 + \cdots + X_p)^n = \sum_{(a_1,\ldots,a_p),\ a_1+\cdots+a_p=n} \frac{n!}{a_1! \ldots a_p!} X_1^{a_1} \ldots X_p^{a_p}.$$

Preuve par récurrence sur p. Interprétation du coefficient multinomial $\begin{pmatrix} n \\ a_1, \ldots, a_p \end{pmatrix}$: nombre de façon de partager un ensemble à n éléments en sous-ensembles de cardinaux $a_1, \ldots, a_p$.

Exemples : 1- paradoxe des anniversaires.
2- Manipulation de formules : d'abord, spécialiser la formule du binôme en 1 et interprétation combinatoire en termes de partition de l'ensemble des parties ; ensuite, en dérivant $(1 + X)^n$ et en spécialisant, $\sum_0^n p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n2^{n-1}$ si $n \geq 1$; interprétation combinatoire (cardinal de $\{(x, A) \in E_n \times \mathcal{P}(E_n),\ x \notin A\}$).

1.4 Permutations d'un ensemble fini

1.4.1 Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Si E est un ensemble, le *groupe symétrique* de E est le groupe $\mathfrak{S}_E$ des bijections $E \to E$ pour la composition (exercice : c'est un groupe). On note $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ et $\sigma^0 = \mathrm{id}_E$. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\sigma^n = \sigma \circ \cdots \circ \sigma$ (n fois) et $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$.
Exercice : si deux ensembles sont équipotents, leurs groupes symétriques sont isomorphes.
On note $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{\{1,\ldots,n\}}$. On a montré que $\#(\mathfrak{S}_n) = n!$.
Définition du support d'une permutation. Définition d'un p-cycle de $\mathfrak{S}_n$, notation $(a_1, \ldots a_p)$, support d'un p-cycle.
Exercice : si $c = (a_0, \ldots, a_{p-1})$ et $m \in \mathbb{Z}$, alors $c^m(a_k) = a_{\overline{k+m}}$ où $\overline{k+m}$ est le reste de la division euclidienne de $k + m$ par p.
L'*ordre* d'un p-cycle est p, *i.e.* $c^p = 1$ et $c^k \neq 1$ si $1 \leq k \leq p - 1$.
Remarque : $\mathfrak{S}_2 = \{1, (12)\}$; si $n \geq 3$, $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien ($(12)(23) \neq (23)(12)$).
Deux permutations dont les supports sont disjoints commutent. **Formule de conjugaison des cycles** : $s(a_1, \ldots, a_p)s^{-1} = (s(a_1), \ldots, s(a_p))$. Tous les p-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
Deux exemples :
i) $[6, 13, 12, 14, 4, 1, 7, 10, 2, 9, 11, 3, 8, 5] = (1, 6)(2, 13, 8, 10, 9)(3, 12)(4, 14, 5)$;
ii) $(123)(325)(153)(1254) = (154)(23)$.
Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, unicité à l'ordre près des facteurs. Dans la preuve, notion d'orbite d'un élément de $\{1, \ldots, n\}$ sous σ. Résultat et preuve à retenir.

Ecriture canonique de la décomposition d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ en produit de cycles à supports disjoints : on écrit chaque cycle en commençant par le minimum de son support (y compris les cycles de longueur 1) et on ordonne les cycles par ordre croissant du minimum des supports.
Définition d'une transposition. Toute permutation est produit de transpositions (on dit que les transpositions *engendrent* $\mathfrak{S}_n$). Pas d'unicité (du tout) pour le produit. Raffinement : les $(k, k+1)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

1.4.2 Signature d'une permutation

Théorème. *Si $n \geq 2$, il existe un unique homomorphisme de groupes $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ non trivial. Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.*
On appelle ε la *signature*. Preuve de l'unicité par engendrement des transpositions. Preuve de l'existence par nombre d'inversions.
Si s a m orbites, alors $\varepsilon(s) = (-1)^{n-m}$ (en effet, la somme des longueurs des orbites égale n).

1.4.3 Groupe alterné

C'est le sous-groupe des *permutations paires*, noyau de la signature. C'est un sous-groupe d'ordre $n!/2$ (les fibres de la signature ont un cardinal constant).
Le groupe alterné est engendré par les 3-cycles $[(12)(34) = (12)(13)(14)(13)]$. Si $n \geq 5$, alors les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

1.5 Encore deux grands classiques (Stirling)

Nombres de Stirling de première espèce : $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ désigne le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui se décomposent en p cycles à supports disjoints (points fixes compris ; autrement dit, dont l'action naturelle sur E_n a p orbites).
Il y a $\begin{bmatrix} n-1 \\ p-1 \end{bmatrix}$ permutations de $\mathfrak{S}_n$ à p cycles pour lesquelles n est point fixe. Par ailleurs, les permutations de $\mathfrak{S}_n$ à p cycles pour lesquelles n n'est pas point fixe sont toutes obtenues une fois et une seule de la façon suivante : on prend une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1}$ à p cycles écrite sous forme canonique et on insère n après $1, 2, \ldots, n-1$ dans l'écriture de la décomposition ; chacune est ainsi obtenue une fois et une seule ce qui montre que ces permutations sont au nombre de $(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix}$. On obtient ainsi la formule récursive : pour tous $n \geq 1$ et $p \geq 1$,

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ p-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix}.$$

Ecriture des premières lignes à la Pascal ($\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$) :

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
2 & 3 & 1 \\
6 & 11 & 6 & 1 \\
24 & 50 & 35 & 10 & 1 \\
120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1
\end{array}$$

Nombres de Stirling de seconde espèce : $\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}$ désigne le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en p parties.
Il y a $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\}$ partitions de E_n en p parties dont le singleton $\{n\}$ est une partie. Par ailleurs, les partitions de E_n en p parties pour lesquelles $\{n\}$ n'est pas une partie sont toutes obtenues une fois et une seule de la façon suivante : on prend une partition de E_{n-1} en p parties et on ajoute n à l'une de ses p parties ; cela montre que ces partitions sont au nombre de $p\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\}$. On obtient ainsi la formule récursive : pour tous $n \geq 1$ et $p \geq 1$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p-1 \end{matrix} \right\} + p\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ p \end{matrix} \right\}.$$

Ecriture des premières lignes à la Pascal.:

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 7 & 6 & 1 \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1
\end{array}$$

[Exos : partitions d'entiers ; marches dans le plan ; permutations.]

2 (Autres) exemples de méthode bijective

2.1 Monômes

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées à coefficients entiers. Le *degré* d'un monôme $X_1^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_n^{a_n}$ est le nombre $\sum_k a_k$.

Proposition 10 *Pour tous entiers $n \geq 1$ et $d \geq 0$, le nombre de monômes de degré d dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est*

$$\binom{n+d-1}{d} = \binom{n+d-1}{n-1}.$$

Le nombre de monômes à n indéterminées de degré inférieur ou égal à d est

$$\binom{n+d}{d} = \binom{n+d}{n}.$$

Preuve. Par méthode bijective. Il s'agit de compter le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = d$ dans les entiers naturels. On associe tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ le n-uplet $(y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + 1, x_1 + x_2 + 2, \ldots, \sum_{1 \leq k \leq n} x_k + n)$. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des solutions de $x_1 + \cdots + x_n = d$ dans $\mathbb{N}^n$ et l'ensemble des suites strictement croissantes de n entiers $y_k \in [1, n+d]$ dont le dernier terme est $y_n = n + d$ (la bijection réciproque est $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1 - 1, y_2 - y_1 - 1, \ldots, y_n - y_{n-1} - 1)$). Calculer le cardinal de ce dernier revient à compter le nombre de parties à $n-1$ éléments dans $\{1, \ldots, n+d-1\}$ (on compte les y_k, $1 \leq k \leq n-1$, puisque $y_n = n + d$ est fixé). Cela démontre la première formule. La seconde est obtenue avec la même bijection, la contrainte $y_n = n+d$ étant relaxée. ■

Exercice : trouver une propriété récursive sur ces nombres qui fournisse une autre preuve par récurrence.

Le nombre de monômes de degré d à n indéterminées est aussi :
- le nombre de solutions de $x_1 + \cdots + x_n = d$ en entiers naturels (évident, utilisé dans la preuve),
- le nombre de combinaisons avec répétitions de d objets pris dans un ensemble à n éléments (exercice pas facile : donner une définition ensembliste de ces objets $((E_n)^d/\mathfrak{S}_d$, quotient pour l'action naturelle) : choisir x_1 fois le premier objet, x_2 fois le deuxième, *etc.*

2.2 Arbres et chemins de Dyck

Les *chemins de Dyck* sont les chemins {NE, SE} dans $\mathbb{Z}^2$ qui partent de l'origine, restent dans le demi-plan nord et aboutissent sur l'axe des abscisses. Le nombre de chemins de Dyck aboutissant au point de coordonnées $(2n, 0)$ est le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (preuve faite en TD).
Les premières valeurs des nombres de Catalan :

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, etc$$

Formules de récursion : $C_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$ ou encore

$$C_0 = 1 \text{ et } \ \forall n \geq 0,\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

On appelle ici *arbre* un arbre plongé et enraciné (dessins). Le contour de l'arbre fournit une bijection entre les arbres et les chemins de Dyck (la réciproque se visualise en "collant" la partie inférieure du graphe du chemin).
On en déduit que le nombre d'arbres à n nœuds est le nombre de Catalan C_n.

2.3 Permutations zig-zag et arbres décroissants

Définition d'une permutation zig-zag et traduction sur le graphe. Bijection avec les arbres décroissants.
On montrera plus tard que le nombre de permutations zig-zag dans $\mathfrak{S}_{2n+1}$ est $(2n+1)!t_n$ où t_n est le coefficient de z^{2n+1} dans le développement de Taylor de $\tan z$ à l'origine.

3 Formules d'inversion

3.1 Coefficients du binôme

Lemme 2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.*

Remarque. Cette somme vaut 1 lorsque $n = 0$.
Preuve. Spécialiser $X = -1$ dans l'identité polynomiale $(1+X)^n = \displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} X^k$.

■

Proposition 11 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs dans une groupe additif (abélien), il y a équivalence entre :*
i) pour tout $n \geq 0$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$;
ii) pour tout $n \geq 0$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.

Preuve. Si i) est vérifiée, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a_j$ $= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n+j+k} \binom{n-j}{k} \right) = a_n$. Pour la réciproque, appliquer le sens direct aux suites $a'_n = (-1)^n b_n$ et $b'_n = (-1)^n a_n$ (les formules d'inversion sont involutives, c'est la morale). ■

Exemple : si $s_{p,n}$ désigne le nombre de surjections de E_p dans E_n, en comptant le nombre d'applications $E_p \to E_n$ selon le cardinal des images, on a la relation $n^p = \sum_{0\leq k\leq n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} s_{p,k}$. Par formule d'inversion (à p fixé), on en déduit que $s_{p,n} = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k^p$.

Interprétation combinatoire directe de cette formule : *via* la formule du crible, compter le nombre d'applications non surjectives $E_p \to E_n$ selon le cardinal de l'ensemble d'arrivée.

3.2 Sommation sur les parties

Lemme 3 **1-** *Si X est un ensemble fini non vide, alors $\sum_{A\subseteq X} (-1)^{\#(A)} = 0$.*
2- *Si X est un ensemble fini non vide et si $Y \in \mathcal{P}(X)\backslash\{X\}$, alors $\sum_{Y\subseteq A\subseteq X} (-1)^{\#(A)} = 0$.*

Remarque. La somme du **1-** vaut 1 lorsque X est vide. Celle du **2-** vaut $(-1)^{\#X}$ lorsque $Y = X$.

Preuve. En sommant sur les parties de cardinal donné, on voit que ce nombre est $\sum_{0\leq k\leq \#(X)} (-1)^k \begin{pmatrix} \#(X) \\ k \end{pmatrix} = (1-1)^{\#(X)} = 0$ (X n'est pas vide). **2-** On utilise la bijection $A \mapsto A \setminus Y$ entre l'ensemble des parties de X contenant Y et l'ensemble des parties de $X \setminus Y$ (sa réciproque est $B \mapsto B \cup Y$). ■

Proposition 12 *Soient X un ensemble fini et f et $g : \mathcal{P}(X) \to G$ deux applications de l'ensemble des parties de X dans un groupe additif (abélien) G. Il y a équivalence entre*
i) $\forall Y \subseteq X,\ g(Y) = \sum_{A\subseteq Y} f(A)$;
ii) $\forall Y \subseteq X,\ f(Y) = \sum_{A\subseteq Y} (-1)^{\#(Y\setminus A)} g(A)$.

Preuve. Si i) est vraie, alors pour toute partie Y de X, $\sum_{A\subseteq Y} (-1)^{\#(Y\setminus A)} g(A) = \sum_{B\subseteq A\subseteq Y} (-1)^{|Y\setminus A|} f(B) = (-1)^{\#Y} \sum_{B\subseteq Y} f(B) \left(\sum_{B\subseteq A\subseteq Y} (-1)^{\#A} \right) = f(Y)$ d'après le lemme. Pour la réciproque, appliquer le sens direct aux fonctions $f'(Y) = (-1)^{|Y|} g(Y)$ et $g'(Y) = (-1)^{|Y|} f(Y)$. ■

Exercice : si $g : \mathcal{P}(X) \to G$ est l'application définie par $g(Y) = \sum_{Y\subseteq A} f(A)$, alors f s'exprime en fonction de g par $f(Y) = \sum_{Y\subseteq A} (-1)^{\#(A\setminus Y)} g(A)$, et inversement (appliquer la formule de la proposition à la fonction $\widetilde{f}(Y) = f(X \setminus Y)$ ou faire une preuve directe en adaptant celle de la proposition).

3.3 Fonction de Möbius

La fonction μ de Möbius est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ lorsque n est divisible par le carré d'un entier supérieur ou égal à 2, et $\mu(p_1 p_2 \dots p_r) = (-1)^r$ si les p_k sont des premiers distincts.

Lemme 4 *Pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k|n} \mu(k) = 0$.*

Remarque. Ce nombre vaut 1 lorsque $n = 1$.

Preuve. On décompose n en produit de facteurs premiers : $n = p_1^{a_1} \dots p_d^{a_d}$. On note $X = \{1, \dots, d\}$. La somme sur les diviseurs dont la contribution est non nulle s'écrit alors $\sum_{k|n} \mu(k) = \sum_{K \in \mathcal{P}(X)} (-1)^{|K|} = 0$ puisque X n'est pas vide. ∎

Proposition 13 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites à valeurs dans une groupe additif (abélien), il y a équivalence entre :*
i) pour tout $n \geq 1$, $b_n = \displaystyle\sum_{k|n} a_k$;
ii) pour tout $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\sum_{k|n} \mu(\frac{n}{k}) b_k$.

Preuve. Si i) est vérifiée, $\sum_{k|n} \mu(n/k) b_k = \sum_{j|k|n} \mu(n/k) a_j = \sum_{j|n} a_j \left(\sum_{d|\frac{n}{j}} \mu(d)\right) = a_n$. Réciproquement, si ii) est vérifiée, alors $\sum_{k|n} a_k = \sum_{k|n} \sum_{j|k} \mu(k/j) b_j = \sum_{j|n} b_j \left(\sum_{j|k|n} \mu(k/j)\right) = b_n$. ∎

Exemple : soit φ est la fonction d'Euler, définie indifféremment sur $\mathbb{N}^*$ par i) $\varphi(n)$ est le nombre de générateurs du groupe additif cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; ii) $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; iii) $\varphi(n)$ est le nombre de racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ complexes de l'unité ; iv) $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. La partition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en éléments d'ordre d fournit la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ (si $d|n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient $\varphi(d)$ éléments d'ordre d qui sont les générateurs du sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par n/d). Par inversion, on obtient

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Autre exemple (trop dur) : soit $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments (prendre par exemple, si p est un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré n dans $\mathbb{F}_q[X]$. Le polynôme $X^{q^n} - X$ se décompose sur $\mathbb{F}_q$ en le produit de tous les polynômes unitaires irréductibles de degré $\leq n$ (les facteurs sont simples) et les degrés des facteurs divisent n. En identifiant es degrés dans cette identité polynomiale, on montre que $q^n = \sum_{d|n} dI_d$. Par inversion, on en déduit que

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$

[Voir Comtet exo16 page 161 pour fonction de Möbius et séries de Lambert.]

4 Formules des classes (pas en 2009/2010)

5 Séries formelles, fonctions génératrices

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif (le prototype est $\mathbb{Z}$; souvent, on prendra aussi $\mathbb{Q}$ pour la combinatoire).

5.1 Algèbre des séries formelles

Une *série formelle* à une indéterminée et à coefficients dans $\mathcal{A}$ est, par définition, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$.
Lois sur les séries formelles : si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des séries formelles et si $\alpha \in \mathcal{A}$, on définit
- l'addition $A + B = (a_n + b_n)_n$;
- la multiplication externe $\alpha.(a_n)_n = (\alpha a_n)_n$;
- la multiplication interne $AB = (c_n)_n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ pour tout n.

Exercice : avec ces lois, les séries formelles forment une algèbre commutative. Le neutre pour l'addition : $0 := (0)_n$. L'opposé de $A = (a_n)_n$ est $-A := (-1).A = (-a_n)_n$. Le neutre pour la multiplication interne est $1 := (1, 0, 0, \dots) = (\delta_{0n})_n$ (Kronecker).

On note $T = (0, 1, 0, 0 \dots) = (\delta_{1n})_n$ (Kronecker). Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $T^k = (0, \dots, 0, k, 0, \dots) = (\delta_{kn})_n$ (Kronecker, exo). On note par convention $T^0 = 1$. Avec ces notations, si $A = (a_n)_n$ est un polynôme nul ou de degré inférieur ou égal à d (*i.e.* si $a_n = 0$ dès que $n \geq d + 1$), alors $A = \sum_{0\leq k\leq d} a_k T^k = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$.

Notation définitive : si $A = A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série formelle, on note

$$A = A(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n.$$

Cette somme infinie est *formelle*, sans qu'aucune notion de convergence ne soit requise. La série T est appelée l'*indéterminée*. On note $\mathcal{A}[[T]]$ cette algèbre des séries formelles (à une indéterminée T et à coefficients dans $\mathcal{A}$).

Exercice : les règles de calcul relatives aux lois dans $\mathcal{A}[[T]]$ sont les lois usuelles sur les séries entières convergentes. Elles prolongent les lois de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}[T]$ (polynômes). Cette construction est faite exprès (définition des lois).

Exemples : $\sum_{n\equiv 3[13]}(-1)^n T^n$, $\sum_{n\geq 14}\frac{1}{n^n}T^n$, $\sum_n n!T^n$, $\sum_n a_n T^n$ où a_n est le nombre de diviseurs premiers congrus à 1 modulo 8 de n (ou encore, pourquoi pas, le nombre de retenues dans la multiplication de n^2 par 32 en base 10) sont des séries formelles à coefficients rationnels.

La *valuation* d'une série formelle non nulle $A = \sum_n a_n T^n$ est le nombre $\mathrm{val}(A) = \min\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$. Par convention, on notera $\mathrm{val}(0) = +\infty$.

Proposition 14 *Si A et B sont des séries formelles,* $\mathrm{val}(A+B) \geq \min\{\mathrm{val}(A), \mathrm{val}(B)\}$ *et* $\mathrm{val}(AB) \geq \mathrm{val}(A)+\mathrm{val}(B)$ *avec égalité pour la valuation du produit si $\mathcal{A}$ est intègre.*

Preuve. Exo. ■

Corollaire 2 *Si $\mathcal{A}$ est intègre, alors $\mathcal{A}[[T]]$ l'est aussi.*

Preuve. Exo. ■

Notation : si $A = \sum_n a_n T^n \in \mathcal{A}[[T]]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera le $n^{\text{ième}}$ coefficient de A par

$$a_n = [T^n]\ A = [T^n]\ A(T).$$

On notera également $a_0 = A(0)$, comme pour la spécialisation des polynômes.

On définit la *dérivée* de la série formelle $A = \sum_n a_n T^n$ par

$$A' = \frac{dA}{dT} = \sum_{n\geq 1} n a_n T^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}T^n.$$

Par récurrence, la *dérivée d'ordre* $k \in \mathbb{N}^*$ est la dérivée de la dérivée d'ordre $k-1$ (et la dérivée d'ordre zéro est la série elle-même) ; on la note $A^{(k)} = d^k A/dT^k$. Les règles de dérivation usuelles relatives au produit et à la somme sont valides pour les séries formelles (exo).

Exercice **(formule de Taylor pour les séries formelles)**. Montrer la formule de Taylor dans $\mathbb{Q}[[T]]$ (ou sur un corps commutatif de caractéristique nulle) :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{(n)}(0)}{n!}T^n.$$

Sur un anneau commutatif quelconque, on a toujours $n![T^n]\ A(T) = A^{(n)}(0)$, pour tout entier naturel n.

5.2 Composée de séries formelles

Lemme 5 *Soit $A \in \mathcal{A}[[T]]$. Si* $\mathrm{val}(A) \geq 1$*, alors la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de séries formelles est* sommable *: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre d'entiers naturels n pour lesquels $[T^k]\ A^n \neq 0$ est fini.*

Preuve. Par récurrence, on montre que $\mathrm{val}(A^n) \geq n$ à l'aide de la formule de la valuation d'un produit. ∎

Si $A = \sum_n a_n T^n$ et B sont des séries formelles **et si** $\mathrm{val}(B) \geq 1$, on note

$$A \circ B = A(B) = A(B(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B(T)^n$$

la série formelle définie par $[T^k]\ A \circ B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [T^k]\ B^n$. Cela définit bien une série formelle puisque cette dernière somme est finie grâce au lemme (seul un nombre fini de termes sont non nuls).

Exercices. 1- Si $B \in \mathcal{A}[[T]]$ est fixée sous l'hypothèse $\mathrm{val}(B) \geq 1$, l'application $\mathcal{A}[[T]] \to \mathcal{A}[[T]]$, $A \mapsto A \circ B$ est un homomorphisme d'algèbre. 2- Si A, B et $C \in \mathcal{A}[[T]]$, et si $\mathrm{val}(B) \geq 1$ et $\mathrm{val}(C) \geq 1$, alors $\mathrm{val}(B \circ C) \geq 1$ et $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$.

Passage sur la réversion des séries formelles, existence et unicité ?

5.3 Inversion d'une série formelle

Formule fondamentale : la série formelle $1 - T$ est inversible dans $\mathcal{A}[[T]]$ et son inverse est

$$\frac{1}{1-T} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

Preuve (formule du produit de deux séries).

Corollaire 3 *1- Si $A \in \mathcal{A}[[T]]$ et si* $\mathrm{val}(A) \geq 1$*, alors $1 - A$ est inversible et $(1 - A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n$.*
2- On suppose que $\mathcal{A}$ est un corps commutatif. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}[[T]]$, A est inversible si, et seulement si $\mathrm{val}(A) = 0$*.*

Preuve. 1- est la formule fondamentale composée avec A. 2- Si A est inversible, c'est la formule de la valuation d'un produit (égalité dans le cas d'un corps). Si $\mathrm{val}(A) = 0$, on met $A(0)$ en facteur et on inverse $A/A(0)$ avec le 1-. ∎

Exercices. 1- Les formules de dérivation des quotients sont encore valides pour les séries formelles inversibles. 2- Développer l'inverse de $(1 - T)^k$ (dériver). On peut retenir que

$$\frac{1}{(1-T)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{n} T^n.$$

Interprétation combinatoire, nouvelle preuve formelle de la formule du nombre de monômes de degré donné.

5.4 Séries formelles usuelles

Par définition : $\exp(T)$, $\cos T$, $\sin T$, $\tan T$ ($\cos T$ est inversible), $\cosh T$, $\sinh T$, $\tanh T$ ($\cosh T$ est inversible), $\ln(1+T)$, $(1+T)^a$ où $a \in \mathbb{C}$, $\arctan T$, $\arcsin T$, *etc*, exponentielle généralisée $\exp(aT) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} T^n$.
Exercice (développements asymptotiques à l'origine, unicité et propriétés algébriques) : les relations de l'analyse restent vraies sur les séries formelles (pourvu qu'elles aient un sens). Exemples : $\ln(1+(\exp T - 1)) = T$, $\exp(\ln(1+T)) = 1+T$, $\sin^2 T + \cos^2 T = 1$, $(A+T)^a(1+T)^b = (1+T)^{a+b}$, $\exp(aT)\exp(bT) = \exp((a+b)T)$.

5.5 Récurrences linéaires et fractions rationnelles

Proposition 15 *Soit $A = \sum a_n T^n \in k[[T]]$ où k est un corps commutatif. Il y a équivalence entre :*
i) Les coefficients de A vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants à partir d'un certain rang, i.e. $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists (d_0, \dots, d_p) \in k^{p+1}$, $d_0 \neq 0$ *et* $\forall n \geq N$,

$$\sum_{k=0}^{p} d_k a_{n-k} = 0;$$

ii) A est la série formelle d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est de valuation nulle.

Preuve. Si $A(T) = C(T)/D(T)$ où C est un polynôme de degré $N-1$ et où $D = d_0 + \cdots + d_p T^p$ un polynôme de degré p, alors le calcul du coefficient de T^n dans $DA = C$ montre que, pour tout $n \geq \max\{N, p\}$, la relation de récurrence est vérifiée (NB : pour que A soit une série formelle, il est nécessaire que $D(0) \neq 0$). Inversement, si la relation de récurrence est vérifiée pour $n \geq N$, en notant $D = d_0 + \cdots + d_p T^p$ (polynôme), on obtient que DA est un polynôme puisque c'est une série formelle dont tous les termes sont nuls au delà du rang $N-1$. ■

Exemple : écrire la relation de récurrence linéaire vérifiée à partir d'un certain rang (lequel ?) par le terme général de la série $\frac{1+T^2}{1-2T+3T^2}$. Inversement, trouver toutes les séries formelles $A = \sum a_n T^n$ telles que $2a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Exos : exemples combinatoires.

6 Eléments de méthode symbolique et de combinatoire analytique (pas en 2009/2010)

6.1 Séries génératrices d'une classe combinatoire

6.2 Analyse des singularités, transfert

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Liste de "mini-thèmes"

1- Nombres algébriques
Un nombre complexe est dit *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels (par exemple, $\sqrt{2}$, $(1+\sqrt[5]{17})/2$) ; dans le cas contraire, il est dit *transcendant*. L'ensemble des nombres algébriques est-il dénombrable ? Même question pour l'ensemble des transcendants.

2- Ensemble triadique de Cantor
L'*ensemble triadique de Cantor* est l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$ dont le développement en base 3 ne contient aucun 1. Donner une interprétation géométrique de cette propriété sur le segment $[0,1]$. Adapter la preuve de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ du cours pour montrer que l'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable (on pourra montrer et utiliser que le développement en base trois d'un nombre de cet ensemble est unique).

3- Hyperplans en position générale
Un ensemble de droites (affines) de $\mathbb{R}^2$ sont dites *en position générale* lorsqu'elles sont deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. Pour tout entier naturel non nul n, calculer le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale.
Généraliser en calculant le nombre de régions de $\mathbb{R}^p$ délimitées par n hyperplans en position générale (n et p sont des entiers naturels non nuls).

4- Rotation dans les arbres
A chaque arbre plongé et enraciné à n sommets $\mathcal{A}$ on associe un arbre binaire plongé et enraciné à n feuilles $\mathcal{B}$ de la façon suivante (cette application est décrite ici de façon non formelle et peut se faire de proche en proche en suivant la numérotation "en largeur" des nœuds de $\mathcal{A}$) :
- on décrit les générations de gauche à droite ; ainsi, la fille la plus à gauche d'un nœud donné est appelé sa fille *ainée*, la seconde est appelée *sœur cadette* de la précédente, *etc* ;
- on élimine la racine de $\mathcal{A}$ et les nœuds internes de $\mathcal{B}$ sont les nœuds de $\mathcal{A}$, la racine de $\mathcal{B}$ étant la fille ainée de la racine de $\mathcal{A}$;
- la fille ainée d'un nœud de $\mathcal{A}$ reste sa fille gauche dans $\mathcal{B}$, alors que la sœur cadette d'un nœud de $\mathcal{A}$ devient sa fille droite dans $\mathcal{B}$;
- l'arbre unaire-binaire ainsi obtenu (au milieu dans la figure) est complété en un arbre binaire (à droite dans la figure).

Un exemple de ces étapes est dessiné dans la figure 1. Montrer que cette construction réalise une bijection entre les arbres plongés et enracinés à n sommets et les arbres binaires plongés et enracinés à n feuilles. En déduire le nombre d'arbres binaires plongés et enracinés à p nœuds, pour tout entier naturel non nul p.

5- Partitions : nombres de Bell
Pour tout entier naturel non nul n, le $n^{\text{ième}}$ *nombre de Bell* est le nombre B_n de partitions d'un ensemble X à n éléments, c'est-à-dire le nombre de relations d'équivalence sur X. Par commodité, on note également $B_0 = 1$.
Calculer les nombres de Bell B_n pour $n \leq 4$ en explicitant les partitions comptées. Calculer les nombres de Bell B_n pour $n \leq 7$ "à la Pascal" en montrant qu'ils sont sommes de nombres de Stirling de seconde

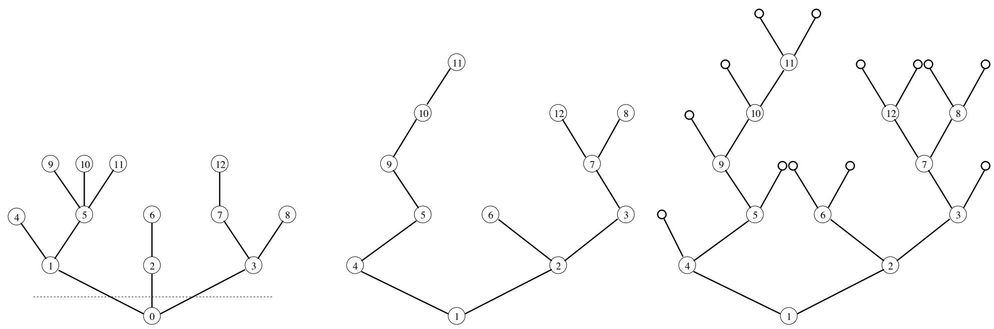


Figure 1: “rotation” d’un arbre $\mathcal{A}$ en arbre binaire $\mathcal{B}$

espèce. En raisonnant sur la combinatoire des partitions, démontrer la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 0$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

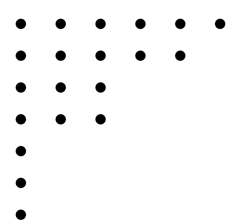
On note $B = B(T)$ la série génératrice exponentielle des nombes de Bell : B est la série formelle

$$B(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} T^n.$$

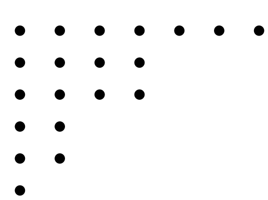
En calculant la dérivée de B en fonction de B, montrer que $B(T) = e^{e^T - 1}$. A l’aide d’un logiciel de calcul formel, écrire les vingt premiers nombres de Bell.

6- Partitions d’entiers, diagrammes de Ferrers

Une *partition* d’un entier naturel non nul n est une suite décroissante $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ d’entiers non nuls dont la somme vaut n. Le nombre m est la *longueur* de la partition et les entiers a_k en sont les *parts*. On représente une telle partition par son *diagramme de Ferrers*, empilement de m lignes de points (ou de carrés) justifiées à gauche, chaque ligne contenant de haut en bas respectivement a_1 points, a_2 points, *etc*. L’exemple ci-dessous est le diagramme de Ferrers de la partition $(6, 5, 3, 3, 1, 1, 1)$ de l’entier 20 ; sa longueur est 7.



La *partition conjuguée* d’une partition $\lambda = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ est la partition du même entier dont le diagramme de Ferrers a pour lignes les colonnes du diagramme de Ferrers de λ. Ainsi, la partition conjuguée de l’exemple précédent est $(7, 4, 4, 2, 2, 1)$; son diagramme de Ferrers est le suivant.



Calculer toutes les partitions des entiers de 1 à 5 et leurs partitions conjuguées. Pour tout entier non nul n, on note $p(n)$ le nombre de partitions de n. Montrer que le nombre $p(n,m)$ de partitions de n de longueur inférieure ou égale à m satisfait les relations de récurrence

$$\begin{cases} \forall(n,m),\ m \geq n \geq 1 \Longrightarrow p(n,m) = p(n) \ ; \\ \forall(n,m),\ n \geq m \geq 2 \Longrightarrow p(n,m) = p(n,m-1) + p(n-m,m) \end{cases}$$

et les conditions initiales $p(n,1) = 1$ (on notera par commodité $p(0,m) = 1$ également). Montrer à l'aide des diagrammes de Ferrers que pour tout $n \geq 1$, le nombre de partitions de n en au plus m parts est le nombre de partitions de n en parts inférieures ou égales à m. Dans cette correspondance, que vaut le nombre de partitions de longueur m de n ?
Montrer que le nombre de partitions de n en parts impaires distinctes est le nombre de partitions de n égales à leur propre conjuguée (on parle de partitions *auto-conjuguées*). [A cet effet, on pourra "plier" les lignes du diagramme de Ferrers d'une partition à parts impaires distinctes par leur milieu.]

7- Groupes linéaires finis
On note $\mathbb{F}_q$ "le" corps fini à q éléments (admis : un tel corps n'existe que si q est la puissance d'un nombre premier et tous les corps à $q = p^a$ éléments sont isomorphes ; ainsi, par exemple, il n'y a pas de corps à 24 éléments). Si n est un entier naturel non nul, calculer le cardinal d'une droite de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_q)^n$ et plus généralement celui d'un sous-espace de dimension $d \leq n$. Calculer le nombre de bases de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_q)^n$. En déduire l'ordre des groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)$.

8- Crible d'Erathostène
Préliminaire : établir la formule du crible sous la forme suivante : si X est un ensemble fini et si $(A_k)_{k\in K}$ est une famille finie de parties de X, alors en notant $A_J = \bigcap_{j\in J} A_j$ pour toute partie J de K (avec la convention $A_\emptyset = X$),

$$|X \setminus \bigcup_{k\in K} A_k| = \sum_{J\subseteq K} (-1)^{|J|} |A_J|.$$

Application arithmétique : on note p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ; ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ *etc.* Pour tout nombre réel x, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Etablir la dualité entre ces deux fonctions : pour tout entier n, $\pi(p_n) = n$ et pour tout réel x, $p_{\pi(x)}$ est le plus grand nombre premier inférieur ou égal à x.
On fixe un entier naturel $n \geq 2$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, \pi(\sqrt{n})\}$, on note A_k l'ensemble des multiples de p_k contenus dans l'ensemble $\{2, \dots, n\}$. Montrer que le complémentaire dans $\{2, \dots, n\}$ de l'union des A_k est l'ensemble des nombres premiers de l'intervalle $]\sqrt{n}, n]$. Montrer par ailleurs que si $k_1, \dots, k_m$ sont des entiers distincts dans $\{1, \dots, \pi(\sqrt{n})\}$, le cardinal de l'intersection $A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_m}$ est la partie entière du nombre $n/(p_{k_1} \dots p_{k_m})$.
Déduire de l'étude précédente la formule

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = (n-1) - \sum_{1\leq i_1 \leq \pi(\sqrt{n})} \lfloor \frac{n}{p_{i_1}} \rfloor + \sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq \pi(\sqrt{n})} \lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \rfloor - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\pi(\sqrt{n})} \lfloor \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_{\pi(\sqrt{n})}}} \rfloor.$$

Cela fournit une expression (théorique !) de $\pi(n)$ en fonction de n et des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

9- Parenthésages, triangulations d'un polygone régulier et Catalan
Montrer que le nombre de parenthésages pour le calcul d'un produit $X_1 X_2 \dots X_n$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan C_n. Montrer que ce nombre est également le nombre de triangulations d'un polygone convexe (régulier) à $n+2$ côtés.

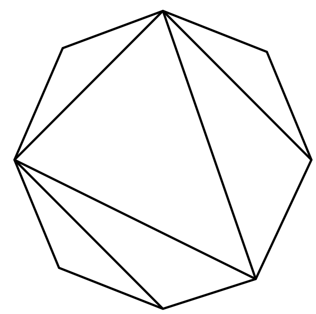


Figure 2: une triangulation de l'octogone

10- Permutations zig-zag et arbres décroissants
Un *arbre croissant* est un arbre binaire plongé et enraciné dans lequel chaque nœud est muni d'une étiquette de sorte que toutes les étiquettes soient distinctes et que ces étiquettes forment une suite croissante lorsqu'on suit n'importe quelle branche de l'arbre à partir de la racine. On associe à chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ un arbre croissant défini récursivement de la façon suivante : on décompose la suite des images en le triplet formé de son minimum, la suite des images à gauche de ce minimum, la suite des images à droite de ce minimum. La récursivité se fait en considérant les suites gauches et droites comme des permutations des nombres écrits.
Ainsi décompose-t-on la permutation $s = [5,3,6,1,2,7,9,4,8]$ en $([5,3,6],1,[2,7,9,4,8])$, on poursuit, et on associe à s l'arbre croissant de la figure 3.

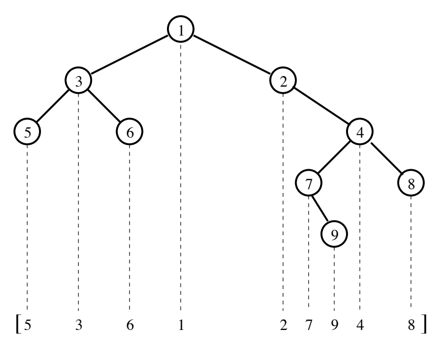


Figure 3: arbre croissant associé à la permutation $s = [5,3,6,1,2,7,9,4,8]$

Montrer que cela définit une bijection entre les arbres croissants à n sommets et les permutations de n objets.
Une permutation s est dite *alternante* lorsque $s(1) > s(2) < s(3) > s(4) \cdots$. En caractérisant les arbres croissants associés aux permutations alternantes d'un nombre impair d'objets, trouver une formule récursive sur leurs nombres et donner une interprétation combinatoire des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction tangente.

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Feuille d'exercices numéro 1

Exercice 1 (dénombrabilité)
1- Montrer que la réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable. En déduire soigneusement que les nombres irrationnels ont le cardinal du continu (en admettant l'hypothèse du continu).

2- Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

3- Un nombre complexe est dit *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels ; dans le cas contraire, il est dit *transcendant*. L'ensemble des nombres algébriques est-il dénombrable ? Même question pour l'ensemble des transcendants.

4- L'*ensemble triadique de Cantor* est l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$ dont les développements en base 3 ne contiennent aucun 1. Adapter la preuve de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ du cours pour montrer que l'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable (on pourra montrer et utiliser que le développement en base trois d'un nombre de cet ensemble est unique).

Exercice 2 (polynômes et nombres de Stirling)
1- Montrer, pour chaque $n \geq 1$, l'identité polynomiale

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k = X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)$$

(on pourra montrer que les coefficients du second membre vérifient l'équation récursive des nombres de Stirling de première espèce).

2- Montrer, pour chaque $n \geq 1$, l'identité polynomiale

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)$$

(on pourra s'assurer d'abord que les $(X)_k = X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)$ forment des bases de polynômes).

Exercice 3 (une formule parfois utile et son interprétation combinatoire)
Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. En calculant de deux manières le cardinal de l'ensemble

$$\{(x, A) \in X \times \mathcal{P}(X),\ x \in A, \#(A) = p\},$$

montrer que $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Exercice 4 (des gammes)
Soit $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dans cet exercice, on appelle $\mathcal{A}$ *l'alphabet* et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de huit lettres prises dans l'alphabet. Par exemple, *aaaaaaaa*, *dededede* et *aceedfdd* sont dans $\mathcal{M}$.

1- Quel est le cardinal de $\mathcal{M}$?

2- Combien $\mathcal{M}$ contient-il de mots commençant par a ?

3- Combien $\mathcal{M}$ contient-il de mots qui commencent par e et finissent par d ?

4- Combien de mots de $\mathcal{M}$ contiennent au moins un a ?

5- Combien de mots de $\mathcal{M}$ contiennent exactement un a ?

6- Combien de mots de $\mathcal{M}$ s'écrivent-ils avec au plus deux lettres différentes ?

7- Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}$ dans lesquels deux lettres consécutives sont toujours différentes ?

8- Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}$ dont chaque lettre diffère des deux suivantes ?

9- Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}$ dont toutes les lettres sont différentes ?

10- Quel est le nombre de mots dans lesquels chaque occurence de la lettre a est suivie d'une occurence de la lettre b ?

11- Quel est le nombre de mots dans lesquels chaque lettre qui apparaît figure exactement deux fois ?

12- Quel est le nombre de mots dans lesquels chaque lettre qui apparaît figure au moins deux fois ?

Reprendre toutes les questions lorsque $\mathcal{A}$ est un ensemble fini à a éléments et $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de m lettres (a et m sont des entiers naturels).

Exercice 5 (quelques pseudo-modélisations)
1- En mars dernier, l'étudiant Zébulon a mangé tous les soirs au restaurant universitaire. Il a mangé 21 fois des frites et 14 fois de la mousse au chocolat. Montrer qu'il y a mangé au moins une fois des frites **et** de la mousse au chocolat. Dans ce registre, peut-on en dire davantage ?

2- Dix personnes de un à soixante ans sont dans une pièce (l'âge d'une personne est un entier naturel). Montrer que l'on peut constituer deux groupes de 1 à 9 personnes qui n'ont aucun membre en commun, tels que la somme des âges des personnes d'un groupe égale celle de l'autre groupe. Par quels entiers peut-on remplacer 10 et 60 ?

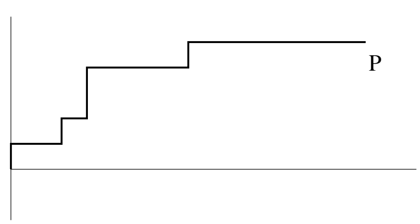
3- Nombres trianglaires, tétraédriques, *etc*
Une marchande d'oranges range ses fruits sur son étal de la manière suivante : à plat, elle les dispose en quinconce sous la forme d'un triangle équilatéral dont chaque côté contient n oranges ; à l'étage supérieur, elle place une orange dans chaque interstice, et ainsi de suite jusqu'au dernier étage qui contient une seule orange. Combien cette pyramide contient-elle d'oranges ?
Généraliser sous la forme d'une formule combinatoire.

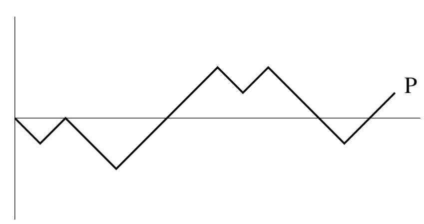
4- On prend une urne contenant 231 boules colorées. Montrer qu'on peut trouver 14 boules de la même couleur ou 14 boules de couleurs différentes. Par quels nombres peut-on remplacer 14 et 231 ?

Exercice 6 (Deux marches aléatoires du plan)
Dans chaque question, on écrira une formule récursive sur les nombres cherchés, on essayera de trouver une interprétation de ces nombres en termes de parties de cardinal donné d'un ensemble de cardinal donné et d'en déduire une formule close pour le résultat, on écrira enfin avec soin une preuve par récurrence du résultat cherché.

1- Marche {N, E}
Si P est un point de $\mathbb{Z}^2$, combien y a-t-il de chemins joignant l'origine à P dont les déplacements élémentaires se font dans l'ensemble $\{(0,1),(1,0)\}$?

2- Marche {NE, SE}
Si P est un point de $\mathbb{Z}^2$, combien y a-t-il de chemins joignant l'origine à P dont les déplacements élémentaires se font dans l'ensemble $\{(1,-1),(1,1)\}$?





3- Bijection
Montrer que, par "rotation", les trajectoires {N,E} sont en correspondance avec les trajectoires {NE,SE} et déduire ainsi l'un de l'autre les résultats des deux questions précédentes.

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Feuille d'exercices numéro 2

Exercice 1 (chemins de Dyck)
1- On rappelle que, lorsque $n+p \in 2\mathbb{N}$ et $|p| \leq n$, le nombre de chemins {NE, SE} (nord-est, sud-est) joignant l'origine au point de $\mathbb{Z}^2$ de coordonnées (n,p) vaut

$$b_{n,p} = \binom{n}{\frac{n+p}{2}} = \binom{n}{\frac{n-p}{2}}.$$

Calculer le nombre de chemins {NE, SE} joignant les points $P(x_P, y_P)$ et $Q(x_Q, y_Q)$ de $\mathbb{Z}^2$.
2- Principe de réflexion
Soit P un point de $\mathbb{Z}^2$ dont l'ordonnée est strictement positive. Exhiber une bijection entre les chemins {NE, SE} joignant le point $(1,1)$ à P et touchant au moins une fois l'axe des abscisses d'une part, et les chemins {NE, SE} joignant le point $(1,-1)$ à P d'autre part.
[On pourra associer à un chemin {NE, SE} touchant l'axe des abscisses le chemin {NE, SE} obtenu en remplaçant les pas précédant le premier contact avec cet axe par leurs symétriques.]
3- Pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, calculer le nombre de chemins {NE, SE} joignant l'origine au point $P(n,p)$ qui ne touchent pas l'axe des abscisses ailleurs qu'en l'origine.
4- Soit $P = (n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p-1$. Montrer que le nombre de chemins {N, E} qui joignent l'origine au point $P(n,p)$ et qui ne touchent la première diagonale (*i.e.* la droite d'équation $x = y$) qu'en l'origine égale

$$\frac{p-n}{p+n}\binom{n+p}{n}$$

(on pourra adapter le principe de réflexion et refaire le raisonnement des questions précédentes ou utiliser la bijection "par rotation" entre les chemins {N, E} et les chemins {NE, SE}).
5- On appelle *chemin de Dyck* tout chemin {NE, SE} joignant l'origine à un point de l'axe des abscisses en restant dans le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ y \geq 0\}$. Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre de chemins de Dyck aboutissant au point d'abscisse $2n$ est le *nombre de Catalan*

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 2 (des gammes)
1- Décomposer les permutations de $\mathfrak{S}_9$ suivantes en produits de cycles à supports disjoints (la notation $[a, b, \dots]$ désigne la permutation qui envoie 1 sur a, 2 sur b, *etc*).

$$\begin{aligned} s &= [5,8,4,9,3,2,7,6,1], \\ t &= [1,5,3,4,2,6,9,8,7], \\ u &= [7,4,1,5,6,3,8,9,2], \\ v &= [3,7,8,9,5,4,2,1,6]. \end{aligned}$$

Calculer s^{17}, t^{1615} , u^{347}, v^{34}. Donner une formule générale pour toutes les puissances entières de s, t, u et v. Décomposer tu^4s^2v en produit de cycles à supports disjoints ; quel est son ordre ?
2- Calculer la signature de s, t, u et v et celle de $u^5(st)^3$.
3- Calculer le nombre d'éléments d'ordre 14 de $\mathfrak{S}_{10}$. Montrer que toutes ces permutations sont impaires.
4- Calculer le nombre d'éléments d'ordre 8 dans $\mathfrak{S}_{42}$ et le nombre d'éléments d'ordre 20 dans $\mathfrak{S}_{15}$.
5- Quel est l'ordre d'un produit de deux transpositions ?

Exercice 3 (points fixes dans les permutations)
Soient n et k des entiers naturels ($n \neq 0$). Compter le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont au moins k points fixes et le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont au exactement k points fixes.

Exercice 4 (permutations carrées)
Montrer qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un carré (*i.e.* s'écrit sous la forme σ^2 où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) si, et seulement si pour tout entier pair k, le nombre de k-cycles est un nombre pair.

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Feuille d'exercices numéro 3

Exercice 1 (matrices et formules d'inversion)
1- Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n la matrice carrée de taille $n+1$:

$$M_n = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Calculer l'inverse de M_n.

Exercice 2 (convolution de Vandermonde)
En développant le produit $(1+X)^m(1+X)^n$, démontrer que pour tout triplet d'entiers (m, n, p) tels que $0 \leq p \leq m$ et $p \leq n$,

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$

Trouver une interprétation combinatoire de cette formule. Calculer $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 (polynômes et identité d'Abel)
On note $A_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n

$$A_n(X, Z) = \frac{1}{n!} X (X - nZ)^{n-1}$$

le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'Abel dans $\mathbb{Q}[X, Z]$. Montrer que pour tout n et pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\frac{\partial^k}{\partial X^k} A_n(X, Z) = A_{n-k}(X - kZ, Z).$$

En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$,

$$P(X) = \sum_{n \geq 0} A_n(X, Z) P^{(n)}(nZ).$$

Démontrer l'identité polynomiale (généralisation de la formule du binôme)

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X(X-kZ)^{k-1}(Y+kZ)^{n-k}$$

et l'identité de convolution

$$A_n(X+Y, Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k(X, Z) A_{n-k}(Y, Z).$$

Exercice 4 (polynômes cyclotomiques)
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle $n^{ième}$ *polynôme cylclotomique* et on note C_n le polynôme unitaire dont les racines sont les racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ complexes de l'unité. Calculer C_n pour $n \leq 6$. Montrer que

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} C_d.$$

En notant μ la fonction de Möbius, en déduire que

$$C_n = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

Les polynômes cyclotomiques sont-ils toujours à coefficients entiers ?

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Feuille d'exercices numéro 4

Exercice 1 (Une équation différentielle bien connue)

Trouver toutes les séries formelles S vérifiant $S'' + S = 0$. Quelle structure a cet ensemble de solutions ? Faire le lien entre les résultats trouvés et la résolution en analyse de cette équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Exercice 2 (Nombres de Fibonacci)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $f_0 = f_1 = 1$ et $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

2.1- Calculer les racines de l'équation caractéristique de la relation de récurrence linéaire qui définit la suite $(f_n)_n$ et en déduire, par le raisonnement classique, une formule close pour f_n comme somme de deux suites géométriques.

2.2- Soit $F \in \mathbb{Z}[[T]]$ la série formelle $F = \sum_{n\geq 0} f_n T^n$. Montrer que

$$F = \frac{1}{1 - T - T^2}.$$

Retrouver la formule close de **2.1-** en développant cette fraction rationnelle en éléments simples. Déduire de l'égalité une expression de f_n comme somme de coefficents binomiaux, que l'on interprétera dans le triangle de Pascal.

Exercice 3 (Un développement en série formelle)
Calculer le développement en série formelle de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1 - T^2)(1 - T^3)}.$$

Quelle interprétation combinatoire des coefficients de cette série ?

Exercice 4 (Relations de récurrence linéaire)

4.1- (Une gamme)
Trouver toutes les suites de nombres rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$$

(on pourra traduire cette relation de récurrence linéaire à coefficients constants sur la série formelle $A = \sum_n a_n T^n$ d'une solution).

4.2- (Permutations involutives)
Pour tout entier naturel n, on note i_n le nombre d'involutions de n objets, c'est-à-dire le nombre de permutations $s \in \mathfrak{S}_n$ telles que $s^2 = 1$. Montrer, par un argument combinatoire, que la suite $(i_n)_n$ satisfait $i_0 = i_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ i_{n+2} = i_{n+1} + (n+1)i_n$$

(on pourra distinguer les involutions fixant l'élément $n+2$ des autres). On note $I_n = i_n/n!$ la proportion des permutations involutives dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ satisfait une relation de récurrence linéaire et en déduire que la série formelle $I(T) = \sum_n I_n T^n$ est l'unique solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$I'(T) - (1+T)I(T) = 0$$

qui vérifie $I(0) = 1$. En déduire que $I(T) = \exp(T + T^2/2)$, puis la forme close

$$\forall n \in \mathbb{N},\ i_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$

4.3- (Séries holonomes)
Montrer que toute série formelle $A = \sum_n a_n T^n$ dont le terme général $(a_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire

$$\forall n,\ Q_p(n)a_{n+p} + \cdots + Q_1(n)a_{n+1} + Q_0(n)a_n = 0$$

où p est un entier naturel non nul fixé et où les coefficients Q_k sont des polynômes en n est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynomiaux.

Exercice 5 (Marches $\{O, N, E\}$ auto-évitantes)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de marches $\{O, N, E\}$ à n pas dans le plan $\mathbb{Z}^2$ dont la trajectoire dans $\mathbb{R}^2$ ne présente aucun point multiple. Montrer, par une étude combinatoire, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

(on pourra établir une bijection entre les chemins à $n+2$ pas se terminant par OO, EE ou NE et les chemins $n+1$ pas). En déduire que la série formelle $\sum_n a_n T^n$ est une fraction rationnelle que l'on calculera. En déduire deux formules closes pour le nombre a_n.

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Feuille d'exercices numéro 5

Exercice 1 (Série génératrice des nombres de Catalan)

Montrer par deux méthodes différentes que la série génératrice $C(T) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T^n$ des nombres de Catalan
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{1}$$
est
$$C = \frac{1-\sqrt{1-4T}}{2T}.$$
On pourra par exemple traduire la relation de récurrence $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ sur la série formelle C (quelles interprétations combinatoires de cette relation ?) et raisonner sur l'équation obtenue, ou encore utiliser directement la formule close (1).

Exercice 2 (Permutations indécomposables)

Une permutation σ de l'ensemble ordonné $\{1,\dots,n\}$ est dite *indécomposable* lorsqu'aucune partie de la forme $\{1,\dots,k\}$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$ n'est stable par σ. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note I_n le nombre de permutations indécomposables du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$; on note aussi $I_0 = 0$. Soient $I = \sum_{n\geq 0} I_n T^n$ la série (formelle) génératrice de ces nombres et $P = \sum_{n\geq 0} n! T^n$ la série génératrice de toutes les permutations. Montrer que toute permutation est une concaténation de permutations indécomposables (par exemple, $[3,4,1,2,6,5,8,9,7,10] = [3,4,1,2][6,5][8,9,7][10] \in \mathfrak{S}_{10}$). Décomposer toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $[T^n]\ I(T)^2$ est le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui sont la concaténation de 2 permutations indécomposables. Généraliser en interprétant la série $I(T)^p$ pour tout entier naturel p.
En déduire que $P = 1/(1-I)$, puis que
$$\begin{aligned} I(T) = \;& 1 - \frac{1}{P(T)} \\ & = T + T^2 + 3T^3 + 13T^4 + 71T^5 + 461T^6 + 3447T^7 + 29093T^8 + \dots \end{aligned}$$
(on pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel pour le calcul des coefficients de degrés supérieurs ou égaux à 5). Décomposer toutes les permutations indécomposables de $\mathfrak{S}_3$ et de $\mathfrak{S}_4$ en produits de cycles à supports disjoints.

UVSQ 2009/2010
Licence de sciences et technologie, santé
LSMI160 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
6 novembre 2009

Examen partiel (deux heures)

1 Question de cours (5 points)

1.1- Donner la définition d'un ensemble infini.

1.2- Donner un exemple d'ensemble infini et faire la preuve qu'il est infini.

2 Premier problème (9 points)

2.1- Montrer que le nombre de 4-cycles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_9$ égale 756.

2.2- Décrire tous les éléments d'ordre 4 dans $\mathfrak{S}_9$ et calculer leur nombre.

2.3- Soit s la permutation de $\mathfrak{S}_9$ dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est $s = (12)(34)(567)$. Calculer l'ordre de s et montrer que toute permutation t de $\mathfrak{S}_9$ qui vérifie $t^2 = s$ est d'ordre 12.

2.4- Décrire tous les éléments d'ordre 12 de $\mathfrak{S}_9$ et calculer leur nombre. Trouver toutes les permutations t de $\mathfrak{S}_9$ telles que $t^2 = s$.

3 Second problème (6 points)

On appelle *marche de Delannoy* une marche $\{N, E, NE\}$ de $\mathbb{Z}^2$ partant de l'origine, c'est-à-dire une marche de $\mathbb{Z}^2$ partant du point $(0, 0)$ et dont les déplacements élémentaires sont pris dans l'ensemble $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on note $D(p, q)$ le nombre de marches de Delannoy aboutissant au point (p, q) (ces nombres sont les *nombres de Delannoy*).

3.1- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les nombres $D(0, n)$, $D(n, 0)$, $D(1, n)$ et $D(n, 1)$.

3.2- Montrer que pour tous les entiers naturels non nuls p et q, on a la relation récursive

$$D(p, q) = D(p - 1, q - 1) + D(p - 1, q) + D(p, q - 1).$$

3.3- Calculer $D(3, 4)$ (on pourra utiliser, en justifiant, un tableau à la Pascal).

.../...

3.4- Par convention, on étendra la notation des coefficients binomiaux par la règle

$$k \notin \{0, 1, \ldots, n\} \Longrightarrow \binom{n}{k} = 0$$

Démontrer que pour tous les entiers naturels p et q, on a la formule close

$$D(p, q) = \sum_{k \geq 0} \binom{q}{k} \binom{p+q-k}{q}.$$

Quel est le nombre de termes non nuls dans le second membre de cette formule ?

UVSQ 2009/2010 6 novembre 2009
Licence de sciences et technologie, santé
LSMI160 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique

Corrigé succinct du partiel

2 Premier problème

2.1- Le nombre de 4-cycles de $\mathfrak{S}_9$ est $\binom{9}{4} \times 3! = 756$ (choix du support pour le premier terme, choix du 4-cycle à support donné pour le second).
2.2- La décomposition en produit de cycles à supports disjoints d'une permutation d'ordre 4 contient au moins un cycle d'ordre 4 et est constituée de transpositions et de 4-cycles (l'ordre d'une permutation est le ppcm des longueurs des cycles de sa décomposition). Ainsi, toute permutation d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_9$ est-elle conjuguée à l'une des permutations suivantes : (1234), (1234)(56), (1234)(56)(78), (1234)(5678).
Le nombre de 4-cycles a été calculé au 2.1-.
Le nombre de permutations conjuguées à (1234)(56) est $\binom{9}{4} \times 3! \times \binom{5}{2} = 7\ 560$ (choix d'un 4-cycle, choix d'une transposition à support dans le complémentaire du support du 4-cycle choisi).
Le nombre de permutations conjuguées à (1234)(56)(78) est $\binom{9}{4} \times 3! \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \frac{1}{2} = 11\ 340$ (même principe de calcul ; le $\frac{1}{2}$ sert à ne compter qu'une fois les produits de transpositions à supports disjoints : par exemple, $(56)(78) = (78)(56)$).
Selon les mêmes principes de calcul, le nombre de permutations conjuguées au produit (1234)(5678) est $\frac{1}{2} \times \binom{9}{4} \times 3! \times \binom{5}{4} \times 3! = 11340$.
2.3- Le ppcm de 2, 2 et 3 est 6 : l'ordre de s est 6. Si $t^2 = s$, alors $t^{12} = \mathrm{id}$: l'ordre de t divise 12. Comme s est d'ordre 6, l'ordre de t n'est ni 1, ni 2, ni 3, ni 4, ni 6 : c'est 12.
2.4- Les éléments d'ordre 12 de $\mathfrak{S}_9$ sont conjugués au produit d'une permutation d'ordre 4 et d'une permutation d'ordre 3 dont les supports sont disjoints. D'après la question 2.1, cela entraîne qu'un élément d'ordre 12 de $\mathfrak{S}_9$ est nécessairement conjugué à (1234)(567) ou à (1234)(56)(789).
Il y a $\binom{9}{4} \times 3! \times \binom{5}{3} \times 2! = 15\ 120$ permutations conjuguées à (1234)(567) (choix d'un 4-cycle, choix d'un 3-cycle à support complémentaire). De la même façon, il y a $\binom{9}{4} \times 3! \times \binom{5}{2} \times 2! = 15\ 120$ permutations conjuguées à (1234)(56)(789).
Soit $t \in \mathfrak{S}_9$ telle que $t^2 = s$. ① Si t est conjuguée à (1234)(567), soient a, b, c, d, e, f, g dans $\{1, \ldots, 9\}$ tels que $t = (abcd)(efg)$. Alors, $t^2 = (ac)(bd)(egf)$. Cela impose les égalités suivantes : $(ac)(bd) = (12)(34)$ et $(egf) = (567)$: t égale

(1324)(576) ou (1423)(576). ② Si $t = (abcd)(efg)(hi)$, alors $t^2 = (ac)(bd)(egf)$ et un raisonnement analogue montre que t égale (1324)(576)(89) ou (1423)(576)(89). ③ Ainsi, les solutions de l'équation $t^2 = s$ sont-elles les 4 permutations (1324)(576), (1423)(576), (1324)(576)(89) et (1423)(576)(89).

3 Second problème

3.1- Il n'y a qu'une marche joignant l'origine au point $(0, n)$: celle dont tous les déplacements élémentaires sont verticaux. Ainsi, $D(0, n) = 1$. De manière analogue, $D(n, 0) = 1$.
Parmi les marches aboutissant à $(1, n)$, il y a n marches contenant un déplacement élémentaire diagonal (*i.e.* $NE = (1, 1)$) et $n + 1$ marches $\{N, E\}$. Au total, cela montre que $D(1, n) = 2n + 1$. De même, $D(n, 1) = 2n + 1$.
3.2- On suppose que $p \geq 1$ et $q \geq 1$. Si on enlève le dernier pas d'une marche de Delannoy aboutissant au point (p, q), on obtient ou bien une marche aboutissant en $(p - 1, q)$ (suivie d'un pas E), ou bien une marche aboutissant en $(p, q - 1)$ (suivie d'un pas N), ou bien une marche aboutissant en $(p - 1, q - 1)$ (suivie d'un pas NE). Cela montre la formule récursive demandée.
3.3- La formule récursive et les valeurs initiales $D(0, n) = 1 = D(n, 0)$ permettent de dresser de proche en proche le tableau des valeurs des nombres de Delannoy. Les premières valeurs de ce tableau sont

1	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11
1	5	13	25	41	61
1	7	25	63	129	231
1	9	41	129	231	591

En particulier, $D(3, 4) = 129$.
3.4- Le nombre de termes non nuls dans la somme de la formule est $1 + \min\{p, q\}$ puisque $\begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} = 0$ dès que $k \geq q + 1$ et $\begin{pmatrix} p + q - k \\ q \end{pmatrix} = 0$ dès que $k \geq p + 1$.
On démontre la formule annoncée par récurrence sur la somme $p + q$. Si $p = 0$, seul le terme d'indice $k = 0$ est non nul dans la somme ; il vaut alors $1 = D(p, 0)$: la formule est vraie. De même, elle est vérifiée lorsque $q = 0$.
On suppose que $p \geq 1$ et $q \geq 1$. Alors, $D(p, q) = D(p-1, q) + D(p, q-1) + D(p-1, q-1)$ selon la formule récursive. Par hypothèse de récurrence, cela entraîne successivement que $D(p, q) = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k - 1 \\ q \end{pmatrix} + \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} q - 1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k - 1 \\ q - 1 \end{pmatrix} + \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} q - 1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k - 2 \\ q - 1 \end{pmatrix} = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k \\ q \end{pmatrix} \left[\frac{p-k}{p+q-k} + \frac{q-k}{q} \frac{q}{p+q-k}\right] + \sum_{k \geq 1} \begin{pmatrix} q - 1 \\ k - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k - 1 \\ q - 1 \end{pmatrix} = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k \\ q \end{pmatrix} [\frac{p+q-2k}{p+q-k} + \frac{k}{q} \frac{q}{p+q-k}] = \sum_{k \geq 1} \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + q - k \\ q \end{pmatrix}$: la formule est démontrée.

UVSQ 2009/2010
Licence de sciences et technologie, santé
LSMI160 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
8 janvier 2010

Examen final (deux heures)

1 Premier problème (12 points)

1.1- (Question de cours) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

1.2- (Question de cours) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Pour tout $n \geq 0$, donner et prouver une formule exprimant a_n en fonction des nombres S_k, $0 \leq k \leq n$.

1.3- On note A et S les séries formelles génératrices exponentielles de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}[[T]]$, à savoir

$$A(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} T^n \quad \text{et } S(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} T^n.$$

Montrer que $S(T) = \exp(T) \times A(T)$ et retrouver le résultat du **1.2-** en utilisant cette égalité.

1.4- On appelle *dérangement* toute permutation sans point fixe. Pour tout entier naturel non nul n, on note d_n le nombre de dérangements du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On note également $d_0 = 1$. En exhibant une partition convenable de $\mathfrak{S}_n$, montrer que pour tout entier naturel n,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

1.5- Donner une formule close calculant d_n pour tout entier naturel n.

1.6- Si n et k sont des entiers naturels non nuls, calculer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes.

1.7- On rappelle que le nombre $1/e$ est la somme de la série alternée convergente

$$\frac{1}{e} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Montrer que d_n est le nombre entier le plus proche de $n!e^{-1}$, pour tout $n \geq 1$.

2 Second problème (8 points)

Soient $m \geq 2$ un entier naturel et $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un alphabet constitué de m lettres distinctes. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{W}_n$ l'ensemble des mots de n lettres prises dans l'alphabet $\mathcal{A}$ tels que la lettre α_m n'apparaisse jamais deux fois consécutives. Par exemple, $\alpha_1\alpha_1\alpha_m\alpha_1\alpha_m \in \mathcal{W}_5$. On note enfin w_n le cardinal de $\mathcal{W}_n$ (en particulier, $w_0 = 1$).

2.1- Calculer w_1, w_2 et w_3.

2.2- Montrer que pour tout $n \geq 0$, $w_{n+2} = (m-1)(w_{n+1} + w_n)$.
[Indication : on pourra considérer la partition de $\mathcal{W}_{n+2}$ formée du sous-ensemble des mots se terminant par une lettre différente de α_m et du sous-ensemble des mots se terminant par α_m.]

2.3- On note $W \in \mathbb{Z}[[T]]$ la série génératrice ordinaire des nombres w_n, c'est-à-dire

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} w_n T^n.$$

Montrer que W est la série formelle d'une fraction rationnelle que l'on calculera sous forme irréductible.

2.4- Extension : soit $k \geq 2$ un entier naturel. Montrer, par une méthode analogue, que la série génératrice ordinaire des mots dans lesquels la lettre α_m n'est jamais répétée k fois consécutives est la série formelle d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré k.

UVSQ 2009/2010
Licence de sciences et technologie, santé
LSMI160 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
18 juin 2010

Examen (deux heures)

1 Question de cours (6 points)

1.1 Soient A et B des parties finies d'un ensemble. Est-il vrai que A et B sont disjointes si, et seulement si $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$?

1.2 Soient E un ensemble et N un entier naturel non nul. Ecrire soigneusement la formule du crible qui exprime le cardinal d'une réunion de N parties finies $A_1, \ldots, A_N$ de E en fonction des cardinaux de leurs intersections.

1.3 Calculer le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1301 qui ne sont multiples ni de 10 ni de 13 ni de 21.

2 Problème (14 points)

On note $E_0 = \emptyset$ et, pour tout entier naturel non nul p,

$$E_p = \{1, 2, \ldots, p\} = \{x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq p\}.$$

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $S(n, k)$ le nombre de surjections de E_n dans E_k et $\left\{ n \atop k \right\}$ le nombre (entier naturel) de Stirling de seconde espèce usuel.

Partie A : nombre de sujections

2.1 Justifier rapidement que $S(n, k) = 0$ si $n + 1 \leq k$.

2.2 Calculer $S(n, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 On suppose que n et k sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.

2.3.1 Calculer, en fonction de $S(n-1,k-1)$, le nombre de surjections de E_n dans E_k pour lesquelles $f^{-1}[f(n)]$ est un singleton de E_k.

2.3.2 Calculer, en fonction de $S(n-1,k)$, le nombre de surjections $f : E_n \to E_k$ pour lesquelles $f^{-1}[f(n)]$ a au moins deux éléments.

2.3.3 Déduire des questions précédentes la relation récursive

$$S(n,k) = kS(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

2.4 Question de cours

Donner la définition des nombres de Stirling de seconde espèce en termes de partitions d'ensembles finis et donner une interprétation combinatoire de la formule récursive

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}.$$

2.5 Démontrer, à l'aide de **2.3** et de **2.4**, que pour tous entiers naturels n et k,

$$S(n,k) = k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{1}$$

2.6 Donner une interprétation combinatoire de la formule (1).

Partie B : nombres de Bell

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note B_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bell qui est le nombre de partitions de E_n. On note également $B_0 = 1$.

2.7 Montrer que si $k \leq n$, le nombre de partitions de E_{n+1} pour lesquelles $n+1$ est dans une part contenant $k+1$ éléments égale $\binom{n}{k} B_{n-k}$.

2.8 Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \tag{2}$$

2.9 On note $B \in \mathbb{R}[[T]]$ la série formelle

$$B = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{T^n}{n!}.$$

Montrer que $B' = B \cdot \exp(T)$ (où B' désigne la série formelle dérivée de B).

2.10 Déduire des questions précédentes que $B(T) = \exp(e^T - 1)$.

UVSQ 2010/2011
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
Mercredi 10 novembre 2010

Examen partiel
(une heure et demie)

1 Question de cours (4 points)

1- Enoncer le théorème des bergers.

2- Calculer le nombre de Stirling de première espèce $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2 Problème 1 (8 points)

Dans tout le problème, n, p et q sont des entiers naturels non nuls. Pour tout entier naturel k, on note E_k l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à k.

On appelle *q-arrangement de longueur p de E_n* l'ensemble des p-uplets de parties deux à deux disjointes de E_n dont le cardinal égale q. On note $\mathcal{A}_{n,p,q}$ l'ensemble des q-arrangement de longueur p de E_n. Autrement dit, si l'on note $\mathcal{P}_q(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n dont le cardinal égale q,

$$\mathcal{A}_{n,p,q} = \{(A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{P}_q(E_n)^p;\ \forall k, l,\ k \neq l \Longrightarrow A_k \cap A_l = \emptyset\}.$$

Enfin, on note $a_{n,p,q}$ le cardinal de $\mathcal{A}_{n,p,q}$.

1- Donner trois éléments de $\mathcal{A}_{7,2,3}$ dans lesquels le nombre 5 n'apparaît pas.

2- Justifier rapidement que $n \leq pq - 1 \Longrightarrow a_{n,p,q} = 0$.

3- Questions de cours : calculer $a_{n,p,1}$ et $a_{n,1,q}$ en fonction de n, p et q (on ne demande pas, dans cette question, de démontrer les théorèmes du cours utilisés).

4- Les questions suivantes consistent à prouver la formule générale : si $n \geq pq$, alors

$$a_{n,p,q} = \frac{n!}{(q!)^p\,(n-pq)!}. \qquad (1)$$

4.1- A l'aide du raisonnement combinatoire rapide ci-dessous et d'un calcul élémentaire, justifier la formule (1) : *pour fabriquer un q-arrangement de longueur p de E_n, on choisit d'abord une partie à q éléments de E_n, puis une partie à q éléments parmi les $n-q$ éléments restants, puis une partie à q éléments parmi les $n-2q$ éléments restants*, etc.

4.2- Les questions suivantes mènent à une preuve davantage argumentée de la formule (1). Montrer que si $p \geq 2$ et si $n \geq pq$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{A}_{n,p,q} & \to & \mathcal{A}_{n,p-1,q} \\ & (A_1, \ldots, A_p) & \mapsto & (A_1, \ldots, A_{p-1}) \end{array}$$

est bien définie, surjective, et que ses fibres ont toutes pour cardinal $\binom{n-pq+q}{q}$.

4.3- Déduire de la question précédente que si $n \geq pq$, alors $a_{n,p,q} = \binom{n-pq+q}{q} a_{n,p-1,q}$.

4.4- Déduire de la question précédente une preuve de la formule (1).

3 Problème 2 (8 points)

Dans tout le problème, p et q sont des entiers naturels non nuls. Pour tout entier naturel k, on note E_k l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à k.

1- Premiers exemples

1.1- Expliciter toutes les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en 2 parties à 3 éléments.

1.2- Calculer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_6$ qui se décomposent en un produit de deux 3-cycles à supports disjoints.

1.3- Calculer le nombre d'applications de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans $\{1, 2\}$ dont toutes les fibres ont exactement 3 éléments.

2- Partitions
Montrer que le nombre de partitions de E_{pq} en p parties à q éléments égale

$$\frac{(pq)!}{p!\,(q!)^p}.$$

On pourra par exemple utiliser l'application $(A_1, \ldots, A_p) \mapsto \{A_1, \ldots, A_p\}$ qui à tout q-arrangement de longueur p de E_{pq} associe la partition de E_{pq} qui lui correspond. La notion de q-arrangement est définie au début du problème 1 ; on pourra, si l'on veut, utiliser la formule (1).

3- Permutations
Montrer que le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_{pq}$ qui se décomposent en p cycles de longueur q à supports disjoints égale

$$\frac{(pq)!}{p!q^p}.$$

On pourra, si l'on veut, définir une application appropriée qui mène au résultat à l'aide du théorème des bergers.

4- Applications à fibres équipotentes
Montrer que le nombre d'applications de E_{pq} dans E_p dont les fibres ont toutes q éléments égale

$$\frac{(pq)!}{(q!)^p}.$$

UVSQ 2010/2011
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
Mercredi 10 novembre 2010

Corrigé succinct du partiel

1 Problème 1

1- Par exemple, $(\{1,2,3\},\{4,6,7\})$, $(\{4,6,7\},\{1,2,3\})$ et $(\{1,2,4\},\{3,6,7\})$.

2- Si $(A_1,\dots,A_p)\in\mathcal{A}_{n,p,q}$, la réunion – disjointe – des A_k est une partie de E_n de cardinal pq. Ainsi, $\mathcal{A}_{n,p,q}\neq\emptyset\Longrightarrow pq\le n$, ce qu'il fallait démontrer.

3- Un 1-arrangement de longueur p est un p-uplet de singletons : il y en a autant que d'arrangements standards de p éléments. Ainsi, $a_{n,p,1}=n!/(n-p)!$.
Un q-arrangement de longueur 1 est une partie à q éléments : $a_{n,1,q}=\binom{n}{q}$.

4.1- Le raisonnement suggéré conduit à la formule

$$a_{n,p,q}=\binom{n}{q}\binom{n-q}{q}\binom{n-2q}{q}\cdots\binom{n-(p-1)q}{q}.$$

Après expression des coefficients du binôme en terme de factorielles, la simplification de cette fraction conduit à la formule (1).

4.2- Si $(A_1,\dots,A_p)\in\mathcal{A}_{n,p,q}$, alors $A_1,\dots A_{p-1}$ sont des parties deux à deux disjointes de cardinal q de E_n : le $(p-1)$-uplet $(A_1,\dots,A_{p-1})$ appartient à $\mathcal{A}_{n,p-1,q}$. Ainsi, l'application est bien définie.
Si $(A_1,\dots,A_{p-1})\in\mathcal{A}_{n,p-1,q}$ et si $n\ge pq$, le cardinal de $E_n\setminus\bigcup_{1\le k\le p-1}A_k$ est supérieur ou égal à q. Cet ensemble contient donc au moins une partie A_p à q éléments. Dans ces conditions, $f(A_1,\dots,A_p)=(A_1,\dots,A_{p-1})$. Cela montre que f est surjective.
En poursuivant le raisonnement qui précède, on montre que la fibre par f de $(A_1,\dots,A_{p-1})$ est l'ensemble des parties à q éléments de $E_n\setminus\bigcup_{1\le k\le p-1}A_k$. Comme le cardinal de ce dernier ensemble est $n-(p-1)q$, cette fibre contient $\binom{n-(p-1)q}{q}$ éléments.

4.3- Appliquer le théorème des bergers à f.

4.4- Par récurrence sur p, à q et n fixés.

2 Problème 2

1.1- $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$, $\{\{1,2,4\},\{3,5,6\}\}$, $\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$, $\{\{1,2,6\},\{3,4,5\}\}$,
$\{\{1,3,4\},\{2,5,6\}\}$, $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$, $\{\{1,3,6\},\{2,4,5\}\}$,
$\{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\}$, $\{\{1,4,6\},\{2,3,5\}\}$,
$\{\{1,5,6\},\{2,3,4\}\}$. Il y en a dix.

1.2- Pour construire une telle permutation, on choisit d'abord le support d'un premier 3-cycle ($\binom{6}{3}$ possibilités), puis un 3-cycle ayant ce support-là (2! possibilités), puis un 3-cycle dont le support est le complémentaire (2! possibilités). On a ainsi compté deux fois tous les produits $cc'=c'c$: il faut encore diviser le résultat par deux. On obtient $\binom{6}{3}\times2\times2\times\frac{1}{2}=40$ produits de 3-cycles à supports disjoints.

Autre raisonnement : à chaque partition de la question **1.1-** correspond 4 produits de 3-cycles à supports disjoints. Le théorème des bergers montre encore que le nombre cherché est $4 \times 10 = 40$.

1.3- Les fibres d'une telle application forment une partition de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chacun de ces partitions donne lieu à deux telles applications (choix d'une image dans $\{1, 2\}$ pour chacune des parties). On obtient ainsi $2 \times 10 = 20$ applications de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dans $\{1, 2\}$ dont toutes les fibres ont exactement 3 éléments.

2- L'application $(A_1, \ldots, A_p) \mapsto \{A_1, \ldots, A_p\}$ indiquée par l'énoncé est surjective et ses fibres ont toutes $p!$ éléments (ordonner $A_1, \ldots, A_p$ revient à choisir une permutation de $\mathfrak{S}_p$). Ainsi, par le théorème des bergers, le nombre de partitions de E_{pq} en p parties à q éléments égale $\frac{1}{p!}\#\mathcal{A}_{pq,p,q} = \frac{(pq)!}{p!(q!)^p}$, la dernière égalité venant de la formule (1) du problème 1, en prenant $n = pq$.

3- Soit g l'application qui à une permutation qui se décompose en p cycles de longueur q à supports disjoints associe la partition de $\{1, \ldots, pq\}$ formée par les p supports de ses cycles. L'application g est clairement surjective et ses fibres ont toutes pour cardinal $((q-1)!)^p$: en effet, une partition $\{A_1, \ldots, A_p\}$ étant donnée, on a $(q-1)!$ choix pour un q-cycle de support A_1, $(q-1)!$ choix pour un q-cycle de support A_2, *etc.* Le théorème des bergers permet de conclure avec le résultat de la question **2-**.

4- Une application $E_{pq} \to E_p$ dont les fibres ont toutes q éléments étant donnée, la famille de ses fibres forme une partition de E_{pq} en p parties à q éléments. Soit h l'application qui à une application $E_{pq} \to E_p$ dont les fibres ont toutes q éléments associe la partition de ses fibres. L'application h est clairement surjective, et ses fibres ont toutes $p!$ éléments. En effet, une partition ϖ de E_{pq} en p parties à q éléments étant donnée, choisir un élément φ de la fibre $h^{-1}(\{\varpi\})$ consiste à ordonner les p parties de ϖ (la première partie pour la fibre $\varphi^{-1}(\{1\})$, la deuxième partie pour la fibre $\varphi^{-1}(\{2\})$, *etc*). On conclut encore avec le théorème des bergers et le résultat de la question **2-**.

UVSQ 2010/2011
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
Mercredi 12 janvier 2011

Examen
(deux heures)

1 Question de cours (4 points)

1- Soient a, b et c les permutations de $\mathfrak{S}_9$ définies par les produits de cycles suivants :
$a = (5, 1, 7, 9, 8, 2)(3, 4)$;
$b = (5, 7, 8)(1, 9, 2)$;
$c = (3, 6, 4)$.
Les permutations a et b commutent-elles ? Les permutations b et c commutent-elles ?

2- Le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_6$ qui ont exactement 3 orbites est-il égal à 1221 ?

2 Problème (12 points)

Un *chemin de Motzkin* est un chemin continu du plan $\mathbb{R}^2$ constitué de pas Nord-Est $(1, 1)$, Sud-Est $(1, -1)$ ou Est $(1, 0)$ et restant entièrement dans le premier quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Par exemple, le chemin de Motzkin de la figure 1 relie l'origine au point $(18, 0)$.

Figure 1: Un exemple de chemin de Motzkin.

Pour tout entier naturel n, on note M_n le nombre de chemins de Motzkin qui relient l'origine au point $(n, 0)$. On note également M la série génératrice des nombres M_n, c'est-à-dire la série formelle

$$M = \sum_{n \geq 0} M_n T^n \in \mathbb{R}[[T]].$$

1- Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, dessiner tous les chemins de Motzkin reliant l'origine à $(k, 0)$ et calculer M_k.

2- Pour tout entier naturel n, calculer le nombre de chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n+1, 0)$ et commençant par un pas Est en fonction des M_k, $k = 0 \dots n$.

3- Pour tout entier naturel n, montrer que le nombre de chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n + 2, 0)$ et ne touchant l'axe des abscisses qu'en l'origine et en $(n + 2, 0)$ égale M_n.

4- Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout entier $k \in \{2, \ldots n+1\}$, calculer le nombre de chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n+1, 0)$ qui recoupent l'axe des abscisses pour la première fois en $(k, 0)$ en fonction des M_k, $k = 0 \ldots n$.

5- Soit n un entier naturel. Déduire des questions précédentes la formule de récurrence

$$\forall n \geq 0,\ M_{n+1} = M_n + \sum_{k=2}^{n+1} M_{k-2} M_{n-k+1} \tag{1}$$

(on pourra exhiber une partition de l'ensemble des chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n+1, 0)$ qui conduise au résultat).

6- Montrer que la formule (1) équivaut à

$$\forall n \geq 0,\ M_{n+2} = M_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} M_k M_{n-k}$$

et en déduire la relation

$$T^2 M^2 - (1 - T)M + 1 = 0$$

dans l'anneau de séries formelles $\mathbb{R}[[T]]$.

7- Question de cours
Donner la définition de la série formelle $\sqrt{1+T} \in \mathbb{R}[[T]]$ et justifier l'existence de la série formelle

$$\sqrt{1 - 2T - 3T^2} \in \mathbb{R}[[T]].$$

8- Démontrer que

$$M = \frac{1 - T - \sqrt{1 - 2T - 3T^2}}{2T^2}.$$

9- Calculer M_5.

3 Travail de synthèse (4 points)

Dans les trois pages suivantes figure une liste de six thèmes combinatoires. Choisir **un** thème, en donner les grandes lignes de l'argumentation et énoncer les résultats attendus. La rédaction ne dépassera pas une page manuscrite.

Liste de thèmes combinatoires

1- Ensemble triadique de Cantor

L'*ensemble triadique de Cantor* est l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$ dont le développement en base 3 ne contient aucun 1. Donner une interprétation géométrique de cette propriété sur le segment $[0,1]$. Adapter la preuve de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ du cours pour montrer que l'ensemble triadique de Cantor n'est pas dénombrable (on pourra montrer et utiliser que le développement en base trois d'un nombre de cet ensemble est unique).

2- Rotation dans les arbres

A chaque arbre plongé et enraciné à n sommets $\mathcal{A}$ on associe un arbre binaire plongé et enraciné à n feuilles $\mathcal{B}$ de la façon suivante (cette application est décrite ici de façon non formelle et peut se faire de proche en proche en suivant la numérotation "en largeur" des nœuds de $\mathcal{A}$) :
- on décrit les générations de gauche à droite ; ainsi, la fille la plus à gauche d'un nœud donné est appelé sa fille *ainée*, la seconde est appelée *sœur cadette* de la précédente, *etc* ;
- on élimine la racine de $\mathcal{A}$ et les nœuds internes de $\mathcal{B}$ sont les nœuds de $\mathcal{A}$, la racine de $\mathcal{B}$ étant la fille ainée de la racine de $\mathcal{A}$;
- la fille ainée d'un nœud de $\mathcal{A}$ reste sa fille gauche dans $\mathcal{B}$, alors que la sœur cadette d'un nœud de $\mathcal{A}$ devient sa fille droite dans $\mathcal{B}$;
- l'arbre unaire-binaire ainsi obtenu (au milieu dans la figure) est complété en un arbre binaire (à droite dans la figure).

Un exemple de ces étapes est dessiné dans la figure 2. Montrer que cette construction réalise une bijection entre les arbres plongés et enracinés à n sommets et les arbres binaires plongés et enracinés à n feuilles. En déduire le nombre d'arbres binaires plongés et enracinés à p nœuds, pour tout entier naturel non nul p.

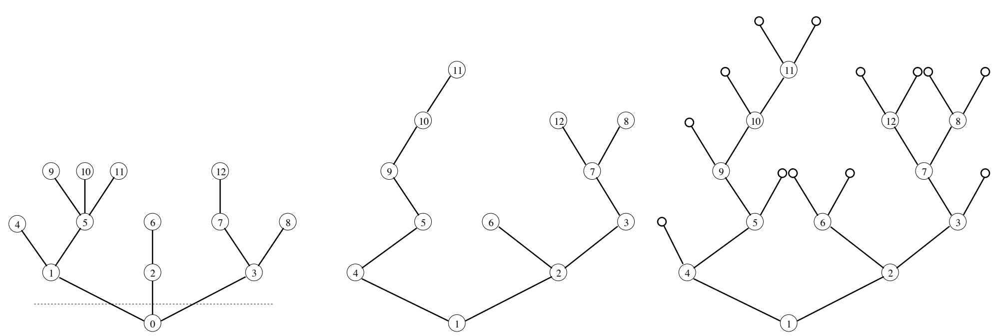


Figure 2: "rotation" d'un arbre $\mathcal{A}$ en arbre binaire $\mathcal{B}$

3- Partitions : nombres de Bell

Pour tout entier naturel non nul n, le $n^{\text{ième}}$ *nombre de Bell* est le nombre B_n de partitions d'un ensemble X à n éléments, c'est-à-dire le nombre de relations d'équivalence sur X. Par commodité, on note également $B_0 = 1$.

Calculer les nombres de Bell B_n pour $n \leq 4$ en explicitant les partitions comptées. Calculer les nombres de Bell B_n pour $n \leq 7$ "à la Pascal" en montrant qu'ils sont sommes de nombres de Stirling de seconde espèce. En raisonnant sur la combinatoire des partitions, démontrer la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 0$:

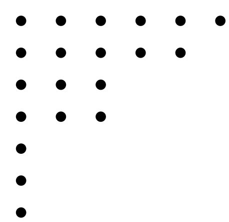
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

On note $B = B(T)$ la série génératrice exponentielle des nombes de Bell : B est la série formelle

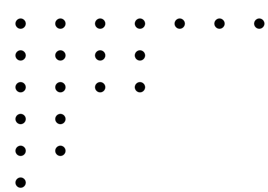
$$B(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} T^n.$$

En calculant la dérivée de B en fonction de B, montrer que $B(T) = e^{e^T - 1}$. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, écrire les vingt premiers nombres de Bell.

4- Partitions d'entiers, diagrammes de Ferrers
Une *partition* d'un entier naturel non nul n est une suite décroissante $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ d'entiers non nuls dont la somme vaut n. Le nombre m est la *longueur* de la partition et les entiers a_k en sont les *parts*. On représente une telle partition par son *diagramme de Ferrers*, empilement de m lignes de points (ou de carrés) justifiées à gauche, chaque ligne contenant de haut en bas respectivement a_1 points, a_2 points, *etc.* L'exemple ci-dessous est le diagramme de Ferrers de la partition $(6, 5, 3, 3, 1, 1, 1)$ de l'entier 20 ; sa longueur est 7.



La *partition conjuguée* d'une partition $\lambda = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ est la partition du même entier dont le diagramme de Ferrers a pour lignes les colonnes du diagramme de Ferrers de λ. Ainsi, la partition conjuguée de l'exemple précédent est $(7, 4, 4, 2, 2, 1)$; son diagramme de Ferrers est le suivant.



Calculer toutes les partitions des entiers de 1 à 5 et leurs partitions conjuguées. Pour tout entier non nul n, on note $p(n)$ le nombre de partitions de n. Montrer que le nombre $p(n, m)$ de partitions de n de longueur inférieure ou égale à m satisfait les relations de récurrence

$$\begin{cases} \forall (n, m),\ m \geq n \geq 1 \Longrightarrow p(n, m) = p(n) \ ; \\ \forall (n, m),\ n \geq m \geq 2 \Longrightarrow p(n, m) = p(n, m-1) + p(n-m, m) \end{cases}$$

et les conditions initiales $p(n, 1) = 1$ (on notera par commodité $p(0, m) = 1$ également). Montrer à l'aide des diagrammes de Ferrers que pour tout $n \geq 1$, le nombre de partitions de n en au plus m parts est le nombre de partitions de n en parts inférieures ou égales à m. Dans cette correspondance, que vaut le nombre de partitions de longueur m de n ?
Montrer que le nombre de partitions de n en parts impaires distinctes est le nombre de partitions de n égales à leur propre conjuguée (on parle de partitions *auto-conjuguées*). [A cet effet, on pourra "plier" les lignes du diagramme de Ferrers d'une partition à parts impaires distinctes par leur milieu.]

5- Parenthésages, triangulations d'un polygone régulier et Catalan
Montrer que le nombre de parenthésages pour le calcul d'un produit $X_1 X_2 \ldots X_n$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan C_n. Montrer que ce nombre est également le nombre de triangulations d'un polygone convexe (régulier) à $n+2$ côtés (voir la figure 3, exemple de triangulation de l'octogone).

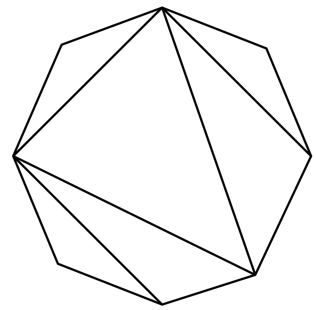


Figure 3: une triangulation de l'octogone

6- Permutations zig-zag et arbres décroissants

Un *arbre croissant* est un arbre binaire plongé et enraciné dans lequel chaque nœud est muni d'une étiquette de sorte que toutes les étiquettes soient distinctes et que ces étiquettes forment une suite croissante lorsqu'on suit n'importe quelle branche de l'arbre à partir de la racine. On associe à chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ un arbre croissant défini récursivement de la façon suivante : on décompose la suite des images en le triplet formé de son minimum, la suite des images à gauche de ce minimum, la suite des images à droite de ce minimum. La récursivité se fait en considérant les suites gauches et droites comme des permutations des nombres écrits.

Ainsi décompose-t-on la permutation $s = [5, 3, 6, 1, 2, 7, 9, 4, 8]$ en $([5, 3, 6], 1, [2, 7, 9, 4, 8])$, on poursuit, et on associe à s l'arbre croissant de la figure 4.

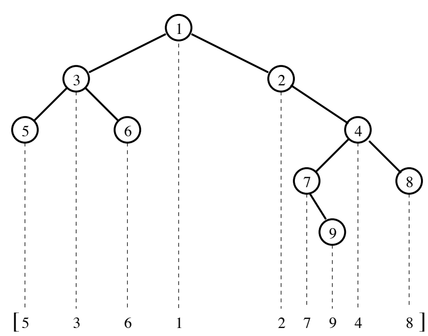


Figure 4: arbre croissant associé à la permutation $s = [5, 3, 6, 1, 2, 7, 9, 4, 8]$

Montrer que cela définit une bijection entre les arbres croissants à n sommets et les permutations de n objets.

Une permutation s est dite *alternante* lorsque $s(1) > s(2) < s(3) > s(4) \cdots$. En caractérisant les arbres croissants associés aux permutations alternantes d'un nombre impair d'objets, trouver une formule récursive sur leurs nombres et donner une interprétation combinatoire des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction tangente.

UVSQ 2010/2011
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
Mercredi 12 janvier 2011

Corrigé succinct de l'examen

Problème
1- On trouve que $M_0 = M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 4$.

2- Un chemin de Motzkin reliant l'origine à $(n+1,0)$ et commençant par un pas Est est constitué d'un pas Est suivi par un chemin de Motzkin reliant $(1,0)$ à $(n+1,0)$. Comme le nombre de chemins de Motzkin reliant $(1,0)$ à $(n+1,0)$ égale le nombre de chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n,0)$ (le translaté d'un chemin de Motzkin par le vecteur $(1,0)$ est encore un chemin de Motzkin), le nombre cherché est M_n.

3- Un chemin de Motzkin reliant l'origine à $(n+2,0)$ et ne touchant l'axe des abscisses qu'en l'origine et en $(n+2,0)$ est constitué successivement d'un pas Nord-Est, d'un chemin de Motzkin reliant $(1,1)$ à $(n+1,1)$ puis d'un pas Sud-Est. Comme l'image par la translation de vecteur $(1,1)$ d'un chemin de Motzkin est un chemin de Motzkin, le nombre cherché est le nombre de chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n,0)$, c'est-à-dire M_n.

4- Un chemin de Motzkin reliant l'origine à $(n+1,0)$ qui recoupe l'axe des abscisses en $(k,0)$ pour la première fois est constitué successivement :
- d'un chemin de Motzkin reliant l'origine à $(k,0)$ et ne touchant l'axe des abscisses qu'en l'origine et en $(k,0)$;
- d'un chemin de Motzkin reliant $(k,0)$ à $(n+1,0)$.
En utilisant les deux questions précédentes, on montre que le nombre cherché égale $M_{k-2}M_{n+1-k}$.

5- Un chemin de Motzkin reliant l'origine à $(n+1,0)$ commence par un pas Est (question 2) ou bien recoupe l'axe des abscisses pour la première fois en $(k,0)$, $k = 2,\dots,n+1$ (question 4). Cela décrit une partition de l'ensemble des chemins de Motzkin reliant l'origine à $(n+1,0)$ qui mène à la formule requise.

6- La formule (1) écrite au rang $n+1$ s'écrit $M_{n+2} = M_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} M_{k-2}M_{n-k+2}$. Le résultat s'en déduit par changement d'indice de sommation (poser $k' = k-2$). En multipliant la formule démontrée par T^{n+2} et en sommant sur tous les $n \geq 0$, on obtient

$$\sum_{n\geq 0} M_{n+2}T^{n+2} = \sum_{n\geq 0} M_{n+1}T^{n+2} + T^2 \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} M_k M_{n-k}\right) T^n,$$

qui s'écrit encore $M - 1 - T = T(M-1) + T^2M^2$: c'est la formule demandée.

7- $\sqrt{1+T} = (1+T)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} T^n$ (coefficients du binôme généralisés). Comme la série $-2T-3T^2$ a un terme constant nul, on peut effectuer la substitution indiquée.

8- On résout l'équation de degré deux de la question 6. La solution devant être une série formelle (seuls les puissances positives ou nulles de T sont admises), la solution $\frac{1-T+\sqrt{1-2T-3T^2}}{2T^2}$ est exclue.

9- On trouve $M_5 = 21$, par exemple avec la formule (1). Un logiciel de calcul formel fournit le début du développement de M :

$M = 1 + T + 2T^2 + 4T^3 + 9T^4 + 21T^5 + 51T^6 + 127T^7 + 323T^8 + 835T^9 + 2188T^{10} + 5798T^{11} + \dots$

UVSQ 2010/2011
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
Vendredi 17 juin 2011

Examen (deux heures)

1 Question de cours (3 points)

Soit $A = \sum a_n T^n \in \mathbb{R}[[T]]$ une série formelle. Démontrer que les propriétés (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes.
(i) A est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de valuation nulle et de degré inférieur ou égal à 2 ;
(ii) il existe un entier naturel N et deux nombres réels u et v tels que $\forall n \geq N$, $a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n$.

2 Exercice (5 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n le nombre de couples (x, y) de nombres entiers naturels solutions de l'équation $3x + 4y = n$. On note $A \in \mathbb{Z}[[T]]$ la série formelle

$$A = \sum_{n \geq 0} a_n T^n.$$

1- Montrer, par un argument combinatoire, que A égale la fraction rationnelle

$$A = \frac{1}{(1 - T^3)(1 - T^4)}.$$

2- Trouver une relation de récurrence linéaire que satisfait la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. Donner une interprétation combinatoire de cette relation de récurrence.

3 Problème (12 points)

Si m et p sont deux entiers naturels, on note $S_{p,m}$ le nombre entier

$$S_{p,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p+k}{p}$$

où la notation usuelle $\binom{a}{b}$ désigne le coefficient du binôme. L'objet de ce problème consiste en quatre approches du calcul explicite d'une formule close des $S_{p,m}$.

1. Pour tous les entiers naturels m et p, calculer $S_{0,m}$, $S_{1,m}$, $S_{p,0}$, $S_{p,1}$ et $S_{p,2}$.

2. Méthode algébrique
Pour tout couple (p, m) d'entiers naturels, on note $G_{p,m} \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme

$$G_{p,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p+k}{p} X^k.$$

2.1. Pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\frac{d^p}{dX^p}\left(X^{p+k}\right).$$

2.2. En déduire que pour tout (m,p), on a l'égalité

$$G_{p,m} = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{dX^p}\left(\frac{X^p - X^{m+p+1}}{1-X}\right)$$

dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{Q}[[X]]$.

2.3. En faisant le changement de variable $Y = X - 1$, calculer le développement de Taylor en $X = 1$ du polynôme

$$\frac{X^p - X^{m+p+1}}{1-X}.$$

2.4. Calculer $S_{p,m}$ en fonction de $G_{p,m}$; en déduire une formule qui exprime $S_{p,m}$ en fonction de m et p sans intervention du signe Σ.

3. Première méthode combinatoire
Soient m et p sont des entiers naturels.

3.1. Soit k un entier naturel tel que $0 \le k \le m+p$. Dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots m+p\}$, combien y a-t-il de parties à $p+1$ éléments dont le maximum soit k ?

3.2. En partitionnant convenablement les parties à $p+1$ éléments de $\{0, 1, \ldots m+p\}$, montrer que

$$S_{p,m} = \binom{m+p+1}{p+1}. \tag{1}$$

4. Seconde méthode combinatoire
Soient m et p sont des entiers naturels.

4.1. Question de cours
Quel est le nombre de solutions $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ de l'équation

$$\sum_{k=1}^{p+1} x_k = m\ ?$$

Quel est le nombre de solutions $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ de l'inéquation

$$\sum_{k=1}^{p+1} x_k \le m\ ? \tag{2}$$

4.2. En partitionnant convenablement les solutions en nombres entiers de l'inéquation (2), démontrer la formule (1).

5. Preuve par récurrence
Donner directement une preuve par récurrence de la formule (1).

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
16 novembre 2011

Examen partiel

1 Question de cours (4 points)

Soient A et ℓ deux entiers naturels tels que $2 \leq \ell \leq A$.
Donner la signature et le nombre d'orbites d'un ℓ-cycle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_A$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur ℓ pour qu'un ℓ-cycle soit une permutation paire.

2 Deux formules combinatoires (5 points)

2.1- Est-il vrai que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$n! = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ désigne le nombre de Stirling de première espèce ?

2.2- Si n et d sont des entiers naturels non nuls,

$$\binom{n+d}{n} = \sum_{k=0}^{d} \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule. En donner une preuve en utilisant la formule du triangle de Pascal sur les coefficients binomiaux.

3 Problème (11 points)

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de E_n.

Si $1 \leq p \leq n$ et si $a_1, \dots a_p$ sont des éléments distincts de E_n, on note $(a_1, \dots a_p)$ le p-cycle de support $\{a_1, \dots a_p\}$ envoyant a_p sur a_1 et a_k sur a_{k+1} lorsque $1 \leq k \leq p-1$.

Une permutation sera dite sous ***forme standard*** lorsqu'elle est écrite comme produit de cycles à supports disjoints dans les conditions suivantes :
- tous les cycles sont écrits, y compris les cycles de longueur 1 ;
- chaque cycle est écrit en plaçant le plus grand élément de son support en première position ;
- les cycles sont ordonnés par ordre croissant de leur premier élément.

Par exemple, la permutation $(3)(6,1)(8,2,7)(9,5,4) \in \mathfrak{S}_9$ est écrite sous forme standard. On admet qu'une telle écriture est unique (résultat élémentaire).

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = [\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$; autrement dit, la notation entre crochets désigne la suite des images. La notation $[\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$ sera appelée ***forme-ligne*** de la permutation σ.

3.1- Ecrire les permutations $s = [1,7,9,3,2,6,5,4,8]$ et $t = [4,5,6,7,8,9,1,2,3]$ de $\mathfrak{S}_9$ sous forme standard. Ecrire la forme-ligne des permutations $u = (5,4)(8,2,1,5)$ et $v = (4,1,3)(9,6,2,7,8)$ de $\mathfrak{S}_9$.

3.2- On définit l'application $\Phi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ de la façon suivante : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on écrit σ sous forme standard ; on oublie les parenthèses dans cette écriture et on considère la suite d'entier obtenus comme la forme-ligne d'une nouvelle permutation $\Phi(\sigma)$.
Exemple dans $\mathfrak{S}_6$: si $\sigma = (4,1,3)(5)(6,2)$ (écriture sous forme standard), alors $\Phi(\sigma) = [4,1,3,5,6,2]$.

3.2.1- Ecrire $\Phi(s)$, $\Phi(t)$, $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$ sous forme standard.

3.2.2- Montrer que Φ est une bijection en en décrivant la réciproque. Calculer $\Phi^{-1}(u)$.

3.3- Soit $k \in E_n$.

3.3.1- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On suppose que l'orbite de n sous σ contient k éléments. Calculer l'image réciproque de n par $\Phi(\sigma)$.

3.3.2- Combien y a-t-il de permutations $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\tau(n-k+1) = n$? En utilisant la bijection Φ, en déduire que le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ pour lesquelles l'orbite de n contient k éléments égale $(n-1)!$.

3.4- Soient i et j dans E_n, quelconques. Combien y a-t-il de permutations de $\mathfrak{S}_n$ pour lesquelles l'orbite de i a pour cardinal j ?

3.5- Combien y a-t-il de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ pour lesquelles $\sigma(n) > \sigma(n-1)$? En déduire, à l'aide de la bijection Φ, que le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ pour lesquelles n et $n-1$ sont dans la même orbite est $\frac{n!}{2}$.

3.6- Soient i et j dans E_n, quelconques. Combien y a-t-il de permutations de $\mathfrak{S}_n$ pour lesquelles i et j sont dans la même orbite ?

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
16 novembre 2011

Corrigé succinct du partiel

2.1- Oui. Les $n!$ permutations de $\mathfrak{S}_n$ se partitionnent selon le nombre de leurs orbites. Si $1 \leq k \leq n$, le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant k orbites est le nombre de Stirling $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. D'où la formule.

2.2- Le nombre de monômes à n indéterminées et de degré inférieur ou égal à d est $\begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix}$; le nombre de monômes à n indéterminées et de degré d est $\begin{pmatrix} n+d-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ (résultats du de cours). Les monômes à n indéterminées et de degré inférieur ou égal à d se partitionnent selon leur degré ; d'où la formule.
Preuve *via* le triangle de Pascal :
$\sum_{k=0}^{d} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = 1 + \sum_{k=1}^{d} \left[\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n \end{pmatrix} \right]$. Ces sommes se télescopent, ce qui implique que $\sum_{k=0}^{d} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = 1 + \begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix}$.

3.1- On procède en deux temps : $s = (9,8,4,3)(7,5,2)(6)(1) = (1)(6)(7,5,2)(9,8,4,3)$ et $t = (9,3,6)(8,2,5)(7,1,4) = (7,1,4)(8,2,5)(9,3,6)$.
Directement, $u = [4,1,3,5,8,6,7,2,9]$ et $v = [3,7,4,1,5,2,8,9,6]$.

3.2.1- Par un calcul analogue, $\Phi(s) = [1,6,7,5,2,9,8,4,3] = (1)(9,3,7,8,4,5,2,6)$ et $\Phi(t) = [7,1,4,8,2,5,9,3,6] = (8,3,4)(9,6,5,2,1,7)$.
On écrit u sous forme standard : $u = (3)(6)(7)(8,2,1,4,5)(9)$,
d'où $\Phi(u) = [3,6,7,8,2,1,4,5,9] = (8,5,2,6,1,3,7,4)(9)$. On écrit v sous forme standard : $v = (4,1,3)(5)(9,6,2,7,8)$,
d'où $\Phi(v) = [4,1,3,5,9,6,2,7,8] = (3)(6)(9,8,7,2,1,4,5)$.

3.2.2- Pour montrer que Φ est une bijection, il suffit de montrer que toute permutation donnée sous forme-ligne est l'image par Φ d'une unique permutation donnée sous forme canonique. Autrement dit, qu'il n'y a qu'une manière de parenthéser une forme-ligne pour écrire une forme standard.
On part ainsi d'une forme-ligne $\sigma = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. L'écriture du premier cycle de la forme standard cherchée commence par a_1 et se termine nécessairement juste avant le premier des a_k qui soit $> a_1$: si $k_1 = \min\{k \in \{2, \ldots, n\}, a_k > a_1\}$, le premier cycle de la forme standard formée sur $[a_1, \ldots, a_n]$ est $(a_1, \ldots, a_{k_1-1})$. En procédant ainsi de manière récursive à partir de la suite $(a_{k_1}, \ldots, a_n)$, on obtient une permutation $\Psi(\sigma)$ écrite sous forme standard dont l'image par Φ est σ.

Il est alors immédiat de vérifier que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n}$. En particulier, Φ est bijective.
Avec cet algorithme, on trouve $\Phi^{-1}(u) = \Psi(u) = (4,1,3)(5)(8,6,7,2)(9)$ et $\Phi^{-1}(v) = (3)(7,4,1,5,2)(8)(9,6)$ (formes standard).

3.3.1- Si l'orbite de n sous σ contient k éléments, le dernier cycle de l'écriture standard de σ commence par n et est de longueur k. Ainsi, dans la forme-ligne de $\Phi(\sigma)$, l'élément n est placé au rang $n-k+1$, ce qui signifie que $\Phi(\sigma)(n-k+1) = n$, ou encore que $\Phi(\sigma)^{-1}(n) = n-k+1$.

3.3.2- Il y a autant de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui envoient $n+k-1$ sur n que d'applications bijectives entre $E_n \setminus \{n-k+1\}$ et E_{n-1}, c'est-à-dire $(n-1)!$.
D'après la question précédente, la bijection Φ envoie l'ensemble des permutations pour lesquelles l'orbite de n contient k éléments sur l'ensemble des permutations τ telles que $\tau(n+k-1) = n$. Cela montre que le nombre de permutations pour lesquelles l'orbite de n contient k éléments est aussi $(n-1)!$.

3.4- Quitte à renuméroter les éléments de E_n, on peut supposer que $i = n$. Autrement dit, en conjuguant par la transposition (i,n) (par exemple), on montre que le nombre de permutations pour lesquelles l'orbite de i contient j éléments est aussi le nombre de permutations pour lesquelles l'orbite de n contient j éléments : c'est $(n-1)!$ d'après la question précédente.

3.5- L'application $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ (n-1,n)$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$ (c'est une involution). Elle envoie $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma(n) > \sigma(n-1)\}$ sur $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma(n) < \sigma(n-1)\}$, ce qui montre l'égalité des cardinaux de ces deux parties de $\mathfrak{S}_n$. Comme ces deux parties forment une partition de $\mathfrak{S}_n$, cela montre que le nombre cherché est $\frac{1}{2}n!$.
Dire que n et $n-1$ sont dans la même orbite sous $\tau \in \mathfrak{S}_n$ signifie que l'écriture de τ sous forme standard fait apparaître $n-1$ après n. Cela équivaut encore à demander que $\sigma = \Phi(\tau)$ vérifie $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(n-1)$.
Ainsi, la bijection Φ envoie l'ensemble des permutations pour lesquelles n et $n-1$ sont dans la même orbite sur l'ensemble des permutations dont l'inverse υ vérifie $\upsilon(n) < \upsilon(n-1)$. D'après ce qui précède, le cardinal commun de ces ensembles est $\frac{1}{2}n!$ (le passage à l'inverse est une permutation involutive de $\mathfrak{S}_n$).

3.6- Là encore, quitte à renuméroter (en conjuguant par une permutation qui envoie i sur n et j sur $n-1$), le nombre de permutations pour lesquelles i et j sont dans la même orbite égale le nombre de permutations pour lesquelles n et $n-1$ sont dans la même orbite : c'est $\frac{1}{2}n!$ d'après la question précédente.

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
13 janvier 2012

Examen

(deux heures)

1 Question de cours (4 points)

Donner la définition de la fonction de Möbius et énoncer la formule d'inversion de Möbius.

2 Racine cubiques dans le groupe symétrique (8 points)

1- Décrire la décomposition en produit de cycles à supports disjoints d'une permutation d'ordre 3 dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, lorsque n est un entier naturel non nul.

2- Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma^3 = 1$. On note également $a_0 = 1$. En partitionnant les permutations de $\mathfrak{S}_{n+3}$ dont le cube est l'identité selon le cardinal de l'orbite de l'élément $n+3$, montrer que

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + (n+2)(n+1)a_n. \tag{1}$$

3- Pour tout $n \geq 0$, on note

$$A_n = \frac{a_n}{n!}.$$

Déduire de (1) une équation de récurrence linéaire satisfaite par la suite $(A_n)_n$.

4- On note $A(T)$ la série formelle de $\mathbb{Q}[[T]]$

$$A(T) = \sum_{n \geq 0} A_n T^n.$$

Démontrer que $A(T)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} A'(T) = (1+T^2)A(T) \\ A(0) = 1. \end{cases}$$

5- En déduire que

$$A(T) = \exp\left(T + \frac{T^3}{3}\right).$$

6- Calculer a_6 (bonus pour qui trouvera trois méthodes de calcul de ce nombre).

3 Eviter le motif 132 (8 points)

Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de $\{1, \ldots, n\}$.
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si $a_j = \sigma(j)$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, la notation entre crochets désigne la suite des images de σ : on note

$$\sigma = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *contient le motif* 132 lorsqu'il existe $a, b, c \in \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$a < b < c \quad \text{et} \quad \sigma(a) < \sigma(c) < \sigma(b).$$

Dans cette situation, on dit que $[[a, b, c]]$ *est un motif* 132 *de* σ. On dit d'une permutation qui ne contient aucun motif 132 qu'elle *évite le motif* 132. On note m_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui évitent le motif 132. On notera également $m_0 = m_1 = 1$ et $m_2 = 2$.

1- Faire la liste de toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$ et de $\mathfrak{S}_4$ qui évitent le motif 132. Calculer m_3 et m_4.

2- Soit $\sigma = [a_1, a_2, \ldots a_n] \in \mathfrak{S}_n$. Soit $k = \sigma^{-1}(n)$. On suppose que $2 \leq k \leq n-1$.
Montrer que si σ évite le motif 132, alors $g > d$ pour tous $g \in \{a_1, \ldots a_{k-1}\}$ et $d \in \{a_{k+1}, \ldots a_n\}$.

En déduire que σ évite le motif 132 si, et seulement si les trois conditions ci-dessous sont vérifiées :
(i) $\{a_1, \ldots a_{k-1}\} = \{n-k+1, \ldots, n-1\}$
(ii) $\{a_{k+1}, \ldots a_n\} = \{1, \ldots, n-k\}$
(iii) les permutations $[a_1, \ldots, a_{k-1}]$ et $[a_{k+1}, \ldots a_n]$ évitent le motif 132.

3- Déduire de la question précédente que pour tout $n \geq 3$,

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} m_{k-1} m_{n-k}.$$

4- Calculer m_5. Est-il vrai que m_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, pour tout $n \geq 3$?

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
13 janvier 2012

Corrigé succinct de l'examen

1 Partie 2

1- Un permutation est d'ordre trois lorsque sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints contient au moins un 3-cycle, et seulement des 3-cycles.

2- $\sigma^3 = 1$ si, et seulement si σ est d'ordre 3 ou σ est l'identité (car 3 est un nombre premier). On décrit toutes les permutations σ de $\mathfrak{S}_{n+3}$ telles que $\sigma^3 = 1$ de la manière suivante :
- ou bien $n+3$ est un point fixe de σ ; dans ces conditions, σ induit une permutation de $\mathfrak{S}_{n+2}$ dont le cube égale 1. Il y a a_{n+2} telles permutations.
- Ou bien l'orbite de $n+3$ a trois éléments $\{a, b, n+3\}$. Il y a $\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ telles orbites et le nombre de 3-cycles dont le support est $\{a, b, n+3\}$ est 2. Dans ces conditions, le complémentaire de cette orbite est stable par σ et σ induit une permutation de $\mathfrak{S}_n$ dont le cube égale 1. Il y a ainsi $2\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} a_n = (n+2)(n+1)a_n$ telles permutations.
On déduit de cette partition et des bijections sous-jacentes que $a_{n+3} = a_{n+2} + (n+2)(n+1)a_n$. Noter que ce raisonnement vaut même si $n = 0$ puisqu'on a posé $a_0 = 1$.

3- Puisque $a_n = n!A_n$, on déduit de la question précédente par un calcul élémentaire que $(n+3)A_{n+3} = A_{n+2} + A_n$ pour tout $n \geq 0$.

4- La traduction de la relation du **3-** en termes de série formelle amène directement à montrer que A vérifie $A' = (1 + T^2)A$. En outre, $A(0) = a_0 = 1$ est donné par l'énoncé.

5- On résout l'équation différentielle linéaire, ce qui montre que $A(T) = \exp(T + T^3/3)$ ($x \mapsto \exp(x + x^3/3)$ est l'unique solution de l'équation différentielle qui vaut 1 en 0 ; cette fonction est développable en série entière à l'origine).

6- $a_6 = 81$. Trois méthodes pour ce calcul : utiliser une des formules récursives (c'est le plus simple, ici) ; calculer le coefficient de T^6 dans la série formelle $\exp(T + T^3/3)$ en la développant ; faire un calcul direct du nombre de permutations de $\mathfrak{S}_6$ qui s'écrivent comme le produit de zéro, un ou deux 3-cycles à supports disjoints.

2 Partie 3

1- Parmi les permutations de $\mathfrak{S}_3$, seule $[1,3,2]$ contient le motif 132. Ainsi, $m_3 = 3! - 1 = 5$.
Le traitement une à une des 24 permutations de $\mathfrak{S}_4$ montre que celles qui contiennent le motif 132 sont $[1,2,4,3]$, $[1,3,2,4]$, $[1,3,4,2]$, $[1,4,2,3]$, $[1,4,3,2]$, $[2,1,4,3]$, $[2,3,1,4]$, $[2,3,4,1]$, $[2,4,1,3]$ et $[2,4,3,1]$. On compte : $m_4 = 4! - 10 = 14$.

2- Par contraposition, supposons qu'il existe $g \in \{a_1, \dots a_{k-1}\}$ et $d \in \{a_{k+1}, \dots a_n\}$ tels que $g \leq d$. Alors, $[[g,n,d]]$ est un motif 132 de σ.
Supposons que σ évite le motif 132. Alors, la propriété démontrée ci-dessus montre que les nombres $a_1, \dots, a_{k-1}$ sont les $k-1$ plus grands nombres de $\{1, \dots, n-1\}$ et que $a_{k+1}, \dots, a_n$ en sont les $n-k$ plus petits, ce qui entraîne (i) et (ii). Enfin, un motif 132 de $[a_1, \dots, a_{k-1}]$ ou de $[a_{k+1}, \dots a_n]$ constituerait un motif 132 de σ, ce qui montre (iii).
Inversement, supposons que σ contienne (au moins) un motif 132.
• Si σ a un motif 132 de la forme $[[g,n,d]]$ où $g \in \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ et $d \in \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$, alors $g < d$, ce qui montre que (i) ou (ii) n'est pas vérifiée.
• Supposons au contraire que σ n'ait pas de motif 132 de la forme $[[g,n,d]]$. Soit alors $[[gcd]]$ un motif 132 de σ, avec $c \neq n$. Supposons par exemple que c soit à gauche de n dans la liste $a_1, \dots a_n$. Dans ces conditions, si d était à droite de n dans la liste $a_1, \dots a_n$, $[[g,n,d]]$ serait également un motif 132 de σ ; cela montre que d est à gauche de n dans la liste $a_1, \dots a_n$. En particulier, $[[g,c,d]]$ est un motif 132 de σ, ce qui contredit (iii). On raisonne de façon analogue si c est à droite de n.

3- La question **2-** montre que choisir une permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui évite le motif 132 revient à choisir d'abord $\sigma^{-1}(n) = k \in \{1, \dots, n\}$, puis :
- si $k = 1$, une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ qui évite le motif 132 ;
- si $2 \leq k \leq n-1$, une permutation de $\{n-k+1, \dots, n-1\}$ et une permutation de $\{1, \dots, n-k\}$ qui évitent le motif 312 ;
- si $k = n$, une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ qui évite le motif 132.
Comme on se convainc aisément que le nombre de permutations d'un ensemble fini totalement ordonné qui évitent le motif 132 ne dépend que du cardinal de cet ensemble (exercice), on en déduit que

$$m_n = m_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} m_{k-1} m_{n-k} + m_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} m_{k-1} m_{n-k}.$$

4- $m_5 = m_0 m_4 + m_1 m_3 + m_2^2 + m_3 m_1 + m_4 m_0 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$.
Les m_n vérifient la même relation récursive que les nombres de Catalan C_n pour $n \geq 3$. En outre, $m_3 = C_3 = 5$. Ainsi, $m_n = C_n$ pour tout $n \geq 3$.
[En fait, comme on a aussi $m_n = C_n$ pour tout $n \leq 2$, on en déduit que m_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, pour tout $n \geq 0$].

UVSQ 2011/2012
Licence de sciences et technologie, santé
LSMA510 (combinatoire), L3 mathématiques et L3 informatique
20 juin 2012

Examen (deux heures)

1 Question de cours (5 points)

1- Donner la définition d'un ensemble *fini*.

2- Soient X et Y deux ensembles finis de cardinaux respectifs x et y. Combien y a-t-il
(i) d'applications de X dans Y ?
(ii) de bijections de X sur Y ?
(iii) de parties de X ?

2 $\{1, 2, 3\}$-compositions (8 points)

Si p et n sont deux entiers naturels, un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est appelé une $\{1, 2, 3\}$-*composition* de n lorsque

$$\sum_{k=1}^{p} x_k = n.$$

Les entiers $x_1, \ldots, x_p$ sont alors appelés les *parts* de la composition $(x_1, \ldots, x_p)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note C_n le nombre de $\{1, 2, 3\}$-compositions de n. On note également $C_0 = 1$.

1- Par énumération directe, calculer C_1, C_2, C_3 et C_4.

2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En partitionnant les $\{1, 2, 3\}$-compositions de $n+3$ selon la valeur de leur première part, calculer C_{n+3} en fonction de C_{n+2}, C_{n+1} et C_n.

3- Dans l'anneau $\mathbb{Q}[[T]]$ des séries formelles à coefficients rationnels, on note

$$C(T) = \sum_{n \geq 0} C_n T^n.$$

Démontrer que $C(T)$ est une fraction rationnelle et que sa forme irréductible est

$$C(T) = \frac{1}{1 - T - T^2 - T^3}.$$

4- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\left(\frac{T}{1-T}\right)^n = \sum_{k \geq n-1} \binom{k}{n-1} T^{k+1}.$$

5- En écrivant $C(T)$ sous la forme

$$C(T) = \frac{1}{1 - \frac{T(1-T^3)}{1-T}},$$

montrer que pour tout entier naturel n, l'entier C_n s'écrit sous forme de la somme double

$$C_n = \sum_{j \geq 0, k \geq 0} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{n-3k-1}{j-1} \tag{1}$$

(dans cette formule, on convient de noter $\binom{a}{b} = 0$ dès lors que $a \leq -1$ ou $b \geq a+1$).
Calculer le nombre de termes non nuls de la somme (1).

3 Permutations alternantes (7 points)

Soit E un ensemble fini totalement ordonné à n éléments, $n \geq 1$. On note dans l'ordre croissant $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ est dite *alternante* lorsque

$$\sigma(e_1) > \sigma(e_2) < \sigma(e_3) > \sigma(e_4) < \cdots$$

Autrement dit, σ est alternante si, et seulement si $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $\sigma(e_k) > \sigma(e_{k+1})$ si k est impair et $\sigma(e_k) < \sigma(e_{k+1})$ si k est pair.

Si $s \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, on pourra la noter par la suite de ses images successives mises entre crochets, sous la forme $s = [s(1), s(2), \ldots, s(n-1), s(n)]$. Par exemple, le 3-cycle (254) de $\mathfrak{S}_6$ s'écrit $(254) = [1, 5, 3, 2, 4, 6]$.

1- Donner un exemple de permutation alternante de $\mathfrak{S}_7$ et un exemple de permutation alternante de $\mathfrak{S}_8$.

2- Pour tout entier naturel impair n, on note I_n le nombre de permutations alternantes de n objets ; si n est pair, on note $I_n = 0$.
Soient n un entier naturel impair, σ une permutation alternante de $\mathfrak{S}_n$ et $m = \sigma^{-1}(1)$ le point où σ atteint son minimum. Montrer que les suites $[\sigma(1), \ldots, \sigma(m-1)]$ et $[\sigma(m+1), \ldots, \sigma(n)]$ définissent des permutations alternantes d'ensembles de cardinaux impairs.
En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_k I_{n-k}. \tag{2}$$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$i_n = \frac{I_n}{n!}.$$

Déduire de (2) une relation de récurrence liant les i_n.

4- Dans l'anneau $\mathbb{Q}[[X]]$ des séries formelles à coefficients rationnels, on note

$$i(X) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n X^n.$$

Démontrer que $i(X)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 et en déduire que

$$i(X) = \tan X. \tag{3}$$

5- Pour tout entier naturel pair n, on note cette fois P_n le nombre de permutations alternantes de n objets ; si n est impair, on note $P_n = 0$. En utilisant la décomposition du **2-** et la formule (3), montrer que la série génératrice exponentielle

$$P(X) = \sum_{n \geq 0} P_n \frac{X^n}{n!}$$

est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 ; en déduire que

$$P(X) = \frac{1}{\cos X}.$$