Publié aux C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 61-66, 1997
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Cohomologie entière de certaines variétés toriques complexes lisses de dimension trois

Nicolas POUYANNE

Département de mathématiques, Université de Versailles - Saint-Quentin
45, avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles CEDEX France
E-mail: pouyanne@math.uvsq.fr
pouyanne@math.uvsq.fr

Résumé. On montre que les groupes de cohomologie entière d'une variété torique lisse de dimension trois sont libres (et on calcule leurs rangs), sous l'hypothèse où son éventail a une section sphérique homéomorphe au disque fermé. Cela s'applique au cadre de la correspondance de McKay en dimension trois, et répond partiellement au problème de la torsion de la cohomologie entière dans une conjecture de Reid ([3]).

Integral cohomology of some smooth complex toric 3-folds

Abstract. It is shown that the integral cohomology groups of a smooth complex 3-dimensional toric variety are free (and we compute their dimensions), under the assumption that the spherical section of its fan is homeomorphic to a closed disk. As a consequence, this gives a partial positive answer to the torsion problem in a conjecture of M. Reid ([3]) about McKay correspondence in dimension 3.

Abridged english version

1- Main theorem

Whenever Σ is a fan in a 3-dimensional lattice, the *spherical section* of Σ is defined as the intersection of the support of Σ with the unit sphere $\mathbf{S}^2$ of $N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ (centered at zero).

Theorem 1. *Let X be a smooth complex toric 3-dimensional variety. If the spherical section of its fan Σ is homeomorphic to a disk $\mathbf{D}^2$, then:*
i) the group $\mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z})$ is free for all $q \in \mathbf{N}$; if q is 1, 3 or ≥ 5, this group is trivial.
ii) Let A be the number of edges in the 1-skeleton of Σ, and I the number of edges of the 1-skeleton of Σ which belong to the interior of the support of Σ. Then,

$$\operatorname{rk} \mathrm{H}^0(X, \mathbf{Z}) = 1; \ \operatorname{rk} \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) = A - 3 \ \text{ and } \ \operatorname{rk} \mathrm{H}^4(X, \mathbf{Z}) = I.$$

The triviality of H^1 is well known ([2]: the π_1 is trivial); the main fact is the freedom of these groups.

The proof, not presented in this Abridged English Version but complete in the main text, is based on elementary toric geometry and the Mayer-Vietoris long exact sequence. The assumption on the spherical section of the fan allows an induction on the number of 3-dimensional cones of the fan.

2- Three-dimensional McKay correspondence for abelian groups

Let G be a finite subgroup of $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. The 2-dimensional McKay correspondence ([5]) looks for a generalisation in dimension 3, under the form of the following conjecture of Miles Reid.

Conjecture. *1) There exists a crepant resolution $X \to \mathbf{C}^3/G$;*
2) for all crepant resolution $X \to \mathbf{C}^3/G$, there exists a basis of $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Z})$ consisting of algebraic cycles in one-to-one correspondence with the irreducible complex representations of G.

The 1) part has been solved by a number of people, and is an elementary fact for abelian groups. The 2) part has found a positive answer for rational cohomology ([3]), without anything about torsion of integral cohomology. Theorem 2, immediate corollary of theorem 1, precises the situation in the case of abelian groups. Note that if G is abelian, the quotient-singularity $\mathbf{C}^3/G$ is isomorphic to a (simplicial) toric variety.

Theorem 2. *Let G be an abelian finite subgroup of $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. For every crepant equivariant (i.e. toric) desingularisation X_Σ of $\mathbf{C}^3/G$, the integral cohomology groups of X_Σ are zero, except (maybe) the following ones:*

$$\mathrm{H}^0(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \ ; \ \mathrm{H}^2(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{A(\Sigma)-3} \ ; \ \mathrm{H}^4(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{I(\Sigma)},$$

where A and I are the numbers of theorem 1.

One has to note that the numbers $A(\Sigma)$ and $I(\Sigma)$ do not depend on the choice of the toric crepant resolution X_Σ; they only depend on the group G. It is an elementary fact (with the help of toric geometry) that the number $A(\Sigma) + I(\Sigma) - 2$ equals the order of G.

3- Remark on the assumption on the spherical section

The topological condition on the spherical section of the fan guaranties that the even cohomology groups vanish. One can easily build examples of smooth complex toric 3-dimensional varieties with non trivial H^3 or H^5.

1- Enoncé du théorème principal

Si Σ est un éventail d'un réseau N de dimension 3, on appelle *section sphérique* de Σ l'intersection du support de Σ avec la sphère unité $\mathbf{S}^2$ de $N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ centrée à l'origine.

Théorème 1. *Soit X une variété torique complexe lisse de dimension trois. Si la section sphérique de l'éventail Σ de X est homéomorphe au disque $\mathbf{D}^2$, alors :*
i) les groupes de cohomologie entière de X sont libres, et nuls en dimensions 1, 3 et ≥ 5 ;
ii) si A désigne le nombre d'arêtes du 1-squelette de Σ et I le nombre d'arêtes du 1-squelette de Σ intérieures au support de Σ, alors

$$\operatorname{rg} \mathrm{H}^0(X, \mathbf{Z}) = 1 \ ; \ \operatorname{rg} \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) = A - 3 \ \ \textit{et} \ \ \operatorname{rg} \mathrm{H}^4(X, \mathbf{Z}) = I.$$

L'information principale de ce théorème réside en la liberté de ces groupes. La trivialité du H^1 est bien connue : ces variétés sont simplement connexes [2].

La preuve du théorème 1, présentée au **4-**, s'appuye sur le lemme topologique du **3-**. Elle n'utilise que la géométrie torique élémentaire et la longue suite exacte de Mayer-Vietoris.

2- Correspondance de McKay en dimension trois pour les groupes abéliens

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. Cherchant à généraliser la correspondance de McKay en dimension deux ([5]), Miles Reid a émis la conjecture suivante, sous sa forme la plus imprécise :
1) il existe une désingularisation crépante (*i.e.* qui ne modifie pas la classe canonique) $X \to \mathbf{C}^3/G$;
2) pour toute désingularisation crépante $X \to \mathbf{C}^3/G$, il existe une correspondance bi-univoque entre les représentations irréductibles de G et une base de la cohomologie entière $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Z})$ formée de cycles algébriques.

Le 1) a été résolu au cas par cas par plusieurs auteurs (Ito, Bertin et Markushévich, Roan) à partir de la classification des sous-groupes finis de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. Yukari Ito et Miles Reid ont répondu par l'affirmative au 2) pour la cohomologie rationnelle $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q})$ sans élément sur la torsion de la cohomologie entière ([3]). Le théorème 1 permet de préciser la situation dans le cas des groupes abéliens comme suit.

2.1- Désingularisations crépantes des variétés toriques simpliciales

Soient N un réseau de dimension trois, et $M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ son réseau dual, conformément aux notations standard de la géométrie torique ([4] ou [2]). Par *cône* d'un réseau R, on entend cône du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} R$.

Soit σ un cône simplicial de M. La variété torique affine $X_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[\sigma \cap M]$ est $\mathbf{Q}$-factorielle ; soit r son indice. Soit m le vecteur primitif (1) de M valant r sur les vecteurs primitifs des arêtes du cône dual $\check{\sigma}$ de σ ([7]).

(1) Un vecteur m d'un réseau M est dit *primitif* si, et seulement si les seuls nombres rationnels r vérifiant $rm \in M$ sont les entiers.

La variété X_σ est lisse si, et seulement si $\check{\sigma}$ (ou σ) est *régulier*, c'est-à-dire si, et seulement si les vecteurs primitifs des arêtes de $\check{\sigma}$ forment une base de M (dans ces conditions, X_σ est isomorphe à l'espace affine $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}}$).

Soit Σ un éventail qui soit une subdivision régulière de $\check{\sigma}$, c'est-à-dire définissant une désingularisation $\pi : X_\Sigma \to X_\sigma$ de X_σ. On note $v_1, ..., v_p$ les vecteurs primitifs du 1-squelette de Σ privé des arêtes de $\check{\sigma}$, et $V_1, ..., V_p$ les diviseurs équivariants associés. Les classes canoniques sont alors reliées par la relation ([1]) :

$$rK_{X_\Sigma} = \pi^*(rK_{X_\sigma}) + \sum_{j=1}^{p}(< v_j, m > -r)V_j.$$

En particulier, π est crépante si, et seulement si $< v_j, m >= r$ pour tout j.

2.2- Torsion et correspondance de McKay en dimension trois

Soit G un sous-groupe abélien fini de $SL(3, \mathbf{C})$. Il est alors bien connu que $\mathbf{C}^3/G$ est isomorphe à une variété torique simpliciale $X_\sigma = Spec\ \mathbf{C}[\sigma \cap M]$ d'indice un ([4] ou [6]). Le cône dual $\check{\sigma}$ d'une telle variété admet 0 pour sommet, et s'appuye sur un triangle T_σ à sommets entiers contenu dans un plan de N d'équation $m = 1$, où m est un vecteur primitif de M. D'après **2.1-**, une subdivision de $\check{\sigma}$ définit une désingularisation crépante de X_σ si, et seulement si elle provient d'une subdivision de T_σ constituée de triangles élémentaires (2). Soit Σ l'éventail d'une telle subdivision.

On note $N(G)$ le nombre de points entiers de T_σ et $I(G)$ le nombre de points entiers intérieurs à T_σ ; la notation est justifiée par le fait que ces nombres ne dépendent pas du choix de la représentation torique X_σ de $\mathbf{C}^3/G$ (*cf.* [3] pour une interprétation de ces nombres en termes du groupe G).

Théorème 2. *Soit G un sous-groupe abélien fini de $SL(3, \mathbf{C})$. Quelle que soit la désingularisation crépante équivariante X_Σ de $\mathbf{C}^3/G$, les groupes de cohomologie entière de X_Σ sont nuls à l'exception (éventuelle) des suivants :*

$$\mathrm{H}^0(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}\ ;\ \mathrm{H}^2(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{N(G)-3}\ ;\ \mathrm{H}^4(X_\Sigma, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{I(G)}.$$

Preuve. Ce théorème est un corollaire direct du théorème 1.

Remarque. La formule de Pick donne $N(G) + I(G) - 2 = 2.Aire(T_\sigma)$, ce qui confirme que la caractéristique d'Euler de X_Σ égale le nombre de triangles élémentaires de la subdivision, c'est-à-dire l'ordre de G.

---

(2) Un triangle est l'enveloppe convexe de trois points non alignés. Si R est un réseau de dimension deux, un *triangle élémentaire* de R est un triangle de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} R$ à sommets entiers (*i.e.* dans R) dont les seuls points entiers sont les sommets.

3- Triangulations du disque fermé

Un *triangle sphérique* (de la sphère $\mathbf{S}^2$) est l'intersection d'une sphère et d'un cône simplicial dont le sommet est au centre de la sphère. Un *polygone sphérique* est une réunion finie connexe de triangles sphériques (d'une même sphère).

Lemme. *Soit P un polygone sphérique homéomorphe au disque fermé D, triangulé par une famille finie $\mathcal{T}$ d'au moins deux triangles sphériques. Alors, il existe $t \in \mathcal{T}$ tel que l'adhérence de $P \setminus t$ soit encore homéomorphe à D.*

Preuve. Au moyen d'un homéomorphisme, on identifie P à D ; la triangulation de P se transporte ainsi en une triangulation de D. Par *point*, on entend sommet de la triangulation (de D ou de P).

i) Premier cas : aucune arête de la triangulation n'est une corde du bord S^1 de D. Soit $t \in \mathcal{T}$ dont une arête soit sur S^1. Le troisième sommet de t est à l'intérieur de D, ce qui impose que $\overline{D \setminus t}$ soit homéomorphe à D (figure 1).

ii) Deuxième cas : au moins une arête de la triangulation est une corde de S^1. Il n'y a qu'un nombre fini de telles cordes. Soit a une arête qui soit une corde de S^1, et qui tende un arc c de S^1 contenant le minimum de points de la triangulation (l'autre arc tendu par a en contient le maximum). Cela signifie que la seule arête qui soit une corde entre deux points de c est a. Par deux points passe au plus une arête ; donc c contient au moins un point distinct des extrémités de a.

Ou bien c contient un seul tel point : il est alors de valence deux (la valence d'un point est le nombre d'arêtes qui en partent). Si t est le triangle de $\mathcal{T}$ dont les sommets sont les extrémités de a et ce dernier point, $\overline{D \setminus t}$ est encore homéomorphe à D (figure 2).

Ou bien c contient au moins deux points distincts des extrémités de a. Soit t un triangle de $\mathcal{T}$ dont une arête est formée de deux tels points. Par minimalité de a, le troisième point de t est intérieur à D. Donc $\overline{D \setminus t}$ est encore homéomorphe à D (figure 3).

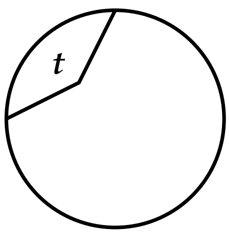

Figure 1

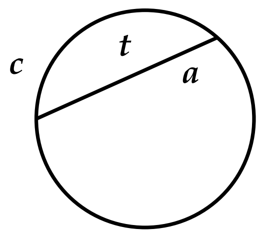

Figure 2

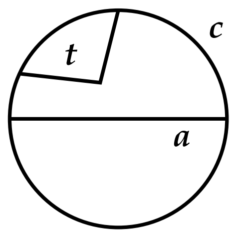

Figure 3

4- Preuve du théorème 1

On note $\Sigma^{(3)}$ l'ensemble des cônes de dimension 3 de Σ. L'hypothèse entraî ne que les cônes de $\Sigma^{(3)}$ sont simpliciaux, qu'ils définissent des cartes de X isomorphes à $\mathbf{C}^3$, et que leur réunion forme le support de Σ. On procède par récurrence sur le cardinal γ de $\Sigma^{(3)}$.

Si $\gamma = 1$, la variété X est isomorphe à l'espace affine $\mathbf{C}^3$; d'autre part, $A = 3$ et $I = 0$. D'où le résultat.

Si $\gamma \geq 2$, le lemme du **3-** appliqué à la section sphérique de Σ (qui est un polygone sphérique que l'on notera P) fournit un cône σ de $\Sigma^{(3)}$ tel que l'éventail Σ' formé des faces des cônes de $\Sigma^{(3)} \setminus \{\sigma\}$ ait encore une section sphérique homéomorphe au disque. On notera A' et I' les nombres A et I de Σ'. On note enfin X' la variété torique que définit Σ', et X_σ l'espace affine de dimension trois défini par σ. La cohomologie entière de X' est connue par hypothèse de récurrence.

Soit t le triangle sphérique $P \cap \sigma$. Au moins une arête de t est nécessairement au bord de P. Deux cas peuvent alors se produire : ou bien un des sommets de t est de valence deux dans la triangulation de P définie par Σ, ou bien tous ses sommets ont une valence supérieure ou égale à trois.

i) Premier cas : t a un sommet de valence deux (figure 4). L'intersection $X_\sigma \cap X'$ est un espace affine complexe de dimension trois privé d'un plan de coordonnées ; elle se rétracte par déformation sur le cercle $\mathbf{S}^1$. On rappelle comment s'écrit la longue suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie :

$$... \to \mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^q(X', \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}^q(X_\sigma, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^q(X' \cap X_\sigma, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}) \to ...$$

Puisque sans torsion, $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est nul. Pour $q \geq 3$, $\mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}^q(X', \mathbf{Z})$. Enfin, $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}^2(X', \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$. Il ne reste plus qu'à constater que $A' + 1 = A$ et que $I' = I$ pour obtenir le résultat.

ii) Deuxième cas : tous les sommets de t ont une valence supérieure ou égale à trois (figure 5). L'intersection $X_\sigma \cap X'$ est un espace affine complexe de dimension trois privé d'un axe de coordonnées ; elle se rétracte par déformation sur la sphère $\mathbf{S}^3$. Toujours grâce à la suite de Mayer-Vietoris, on obtient la nullité de $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{Z})$ et de $\mathrm{H}^3(X, \mathbf{Z})$; que $\mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}^q(X', \mathbf{Z})$ pour $q = 2$ et $q \geq 5$; enfin que $\mathrm{H}^4(X, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}^4(X', \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}$. Comme $A' = A$ et $I' + 1 = I$, le résultat est démontré.

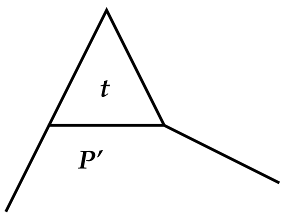

Figure 4

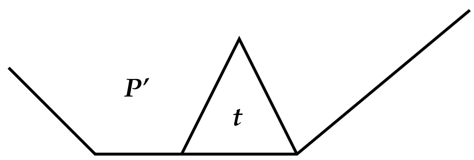

Figure 5

5- Remarques sur l'hypothèse "homéomorphe au disque fermé"

5.1- La condition topologique sur la section sphérique de l'éventail assure la nullité des groupes de cohomologie impairs. Ce résultat tombe en défaut dans le cas général. Par exemple, tout éventail régulier dont la section sphérique est homéomorphe au papillon de la figure 6 (tous les triangles sont dessinés) définit une variété torique lisse X dont les groupes de cohomologie entière sont les suivants : $\mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{h^q}$, où $h^q = 0$ pour $q = 1$

ou $q \geq 4$, $h^2 = 2$, $h^3 = 1$. La caractéristique d'Euler de la variété est cependant bien égale au nombre de cônes de dimension maximale, à savoir deux.

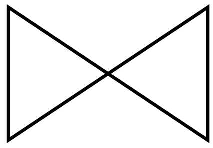

Figure 6

Ces groupes de cohomologie se calculent encore à la Mayer-Vietoris, en décomposant X comme union de deux espaces affines complexes de dimension trois (les ailes du papillon), dont l'intersection se rétracte par déformation sur le produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ (c'est le produit d'un tore complexe de dimension deux et d'une droite affine complexe).

5.2- De même, on construit aisément des variétés toriques lisses dont le cinquième groupe de cohomologie entière est non trivial.

Par exemple, soit Σ (resp. Σ') un éventail régulier dont la trace sur sa propre section sphérique soit un polygone sphérique triangulé homéomorphe à celui de la figure 8 (resp. la figure 7). Soient X (resp. X') la variété torique lisse de dimension trois définie par Σ (resp. Σ'). Alors, X est la réunion de X' et d'une sous-variété Y isomorphe à l'espace affine $\mathbf{C}^3$.

Les groupes de cohomologie entière de X sont les suivants : $\mathrm{H}^q(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{h^q}$, où $h^q = 0$ pour $q = 1$, $q = 3$ ou $q \geq 6$, $h^2 = 7$, $h^4 = 2$ et $h^5 = 1$. Le calcul, toujours à la Mayer-Vietoris, utilise le fait suivant : l'intersection de Y et de X' est un espace affine complexe de dimension trois privé de deux droites complexes sécantes ; elle se rétracte par déformation sur une somme connexe de $\mathbf{S}^4$ et de deux copies de $\mathbf{S}^3$.

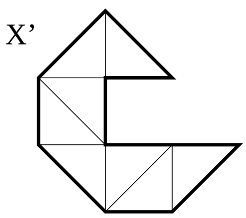

Figure 7

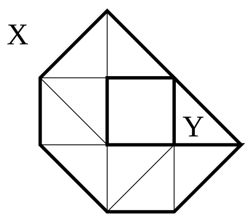

Figure 8

Références bibliographiques.

[1] Bouvier-Joly C., 1993. Une approche des diviseurs essentiels des singularités algébriques, *thèse de l'Université Joseph Fourier*, Grenoble.

[2] Danilov V.I., 1978. The Geometry of Toric Varieties, *Russian Math. Surveys*, 33 II,

p. 97-154.

[3] Ito Y. et Reid M., 1995. The McKay Correpondence for Finite Subgroups of SL$(3, \mathbf{C})$, *prepublication* (serveur Duke).

[4] Kempf G., Knudsen F., Mumford D. et Saint-Donat B., 1973. *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Math. Springer 339.

[5] McKay J., 1980. Graphs, Singularities and Finite Groups, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 37, p.183-186.

[6] Pouyanne N., 1992. Une résolution en singularités toriques simpliciales des singularités-quotient de dimension trois, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, vol. I, n° 3, p. 363-398.

[7] Reid M., 1980. Canonical 3-folds, *Journées de géométrie algébrique d'Angers*, A. Beauville, Ed. Sijthoff and Noordhoff, Aalphen aan den Rijn, p. 273-310.